

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

École de gestion

Variation du prix du risque, exposition dynamique
au facteur de marché et horizon de placement

par

William Drouin

Mémoire présenté au programme de Maîtrise en administration

En vue de l'obtention du grade de

Maîtrise en Finance – Maître ès sciences (M.Sc.)

Août 2019

Sommaire

Moreira et Muir (2017) présentent une stratégie d'allocation dynamique de l'exposition à différents facteurs de risque qui crée une valeur ajoutée par unité de risque sur l'échantillon de rendements boursiers allant de 1926 à 2015. Cette création de valeur n'est pas expliquée par la théorie financière moderne. De plus, bien que Moreira et Muir (2018) s'intéressent à la rentabilité de leur stratégie d'investissement pour un investisseur ayant un long horizon d'investissement, ils n'abordent cette question que de façon théorique. Ils n'étudient donc pas empiriquement l'effet de l'horizon de placement sur la valeur créée (gain d'utilité espéré pour l'investisseur) par leur stratégie d'allocation dynamique. Ce mémoire s'inscrit dans le domaine de recherche sur la gestion active des investissements boursiers. Les principaux objectifs de recherche sont de comprendre le comportement empirique de la stratégie proposée par Moreira et Muir (2017), en plus de déterminer l'impact de l'horizon de placement sur le rendement ajusté pour le risque de la stratégie, facteur ignoré jusqu'ici dans la littérature. Cette analyse de l'horizon de placement est effectuée par la simulation de rendements boursiers journaliers en utilisant des méthodes diverses fondées sur le modèle théorique de la marche aléatoire, sur les modèles de type GARCH(p,q), soient GARCH-M(1,1), TGARCH-M(1,1) et EGARCH-M(1,1), et sur le principe de *resampling*, par le biais du *simple resampling*, du *wild bootstrap* et du *stationary bootstrap*. Les différents modèles sont traités à titre de contrôle de la modélisation de certaines caractéristiques empiriques de l'échantillon original dans les simulations. Les simulations semblent confirmer l'hypothèse qu'il existe une relation positive entre la valeur créée par la stratégie originale et l'horizon de placement, soit qu'il faut l'appliquer sur un horizon de 20 ans et plus pour espérer réaliser des gains significatifs. Dans un deuxième temps, le mémoire présente l'inclusion de l'aspect d'allocation transversale à la stratégie proposée par Moreira et Muir (2017) en subdivisant le facteur de marché en N actifs risqués, soit en dix secteurs d'activité économique. Cette section confirme l'hypothèse posée que la distinction plus fine du facteur de marché amène des gains supplémentaires, au sens du rendement ajusté pour le risque et ce, pour tout horizon de placement.

Remerciements

Il m'est important de prendre ces quelques lignes pour remercier mon directeur de recherche, Guy Bellemare, pour tout son temps consacré à la lecture et la supervision de ce mémoire. Je ne peux passer sous silence la qualité de ses conseils et de ses recommandations, sa façon d'aborder les problèmes complexes, en plus de l'encourageante confiance qu'il m'a accordée tout au long de mon travail sur ce mémoire. Merci.

Pour leur intérêt envers mon sujet de recherche et le temps passé à la revue de ce mémoire à titre d'examineur, je remercie Jean Desrochers et Mario Lavallée.

Un merci spécial à mes parents pour leur support et pour leur aide quant à la correction du français.

Je tiens finalement à remercier l'École de gestion de l'Université de Sherbrooke, la Fondation de l'Université de Sherbrooke ainsi que Produits forestiers Résolu pour le financement accordé pour la complétion de ce mémoire.

Table des matières

1. INTRODUCTION.....	3
2. RETOUR SUR LES TRAVAUX DE MOREIRA & MUIR.....	6
2.1 Méthodologie des travaux de Moreira & Muir.....	6
2.1.1 Persistance des deux premiers moments des rendements	6
2.1.2 Déséquilibre temporel du prix du risque.....	8
2.1.3 Épargne et consommation d’unités de risque.....	10
2.1.4 Modélisation du prix du risque	11
2.1.5 Modélisation de l’allocation temporelle du risque	12
2.2 Réplication des résultats importants.....	15
2.2.1 Régressions linéaires et alphas générés	15
2.2.2 Performance cumulative.....	17
2.2.3 Signalement de changement de régime	20
2.2.4 Aspect symétrique de la stratégie et tendance haussière.....	23
2.2.5 Retour sur la théorie financière classique	26
2.2.6 Importance du levier financier	28
2.2.7 Probabilités du signe du rendement excédentaire	30
2.3 Questionnements relatifs à l’échantillon utilisé	32
2.3.1 Performance sur des sous-échantillons.....	35
3. MÉTHODOLOGIE DES SIMULATIONS	37
3.1 Modèle théorique.....	39
3.2 Modèles de type GARCH(p,q)	40
3.3 Modèles de type <i>resampling</i>.....	45
3.3.1 <i>Simple resampling</i>	45
3.3.2 <i>Wild bootstrap</i>	46
3.3.3 <i>Stationary bootstrap</i>	48
4. RÉSULTATS.....	51

4.1	Données de l'échantillon original réalisé	51
4.2	Comportement empirique des méthodes de simulation.....	51
4.2.1	Paramétrage des modèles.....	52
4.2.2	Génération de rendements journaliers	54
4.2.3	Statistiques mensuelles des simulations	56
4.3	Résultats sur l'horizon de placement.....	61
4.4	Variables explicatives de la valeur ajoutée	70
4.4.1	Identification des variables	71
4.4.2	Comportement des variables en fonction de l'horizon	76
5.	APPLICATION À N TITRES RISQUÉS.....	79
5.1	Hypothèses relatives à l'allocation transversale	79
5.2	Importance de l'ordonnancement des allocations	82
5.2.1	Exemple d'allocation transversale suivie d'une allocation temporelle.....	82
5.2.2	Exemple d'allocation temporelle suivie d'une allocation transversale.....	83
5.3	Méthodologies testées.....	85
5.3.1	Allocation temporelle puis transversale.....	85
5.3.2	Allocation transversale puis temporelle.....	89
5.4	Analyse des résultats des diverses allocations.....	90
5.5	Retour sur l'horizon de placement à N actifs risqués.....	92
5.5.1	Méthodologie de simulation à N actifs risqués	93
5.5.2	Résultats des simulations à N actifs risqués.....	94
	CONCLUSION	98
	BIBLIOGRAPHIE.....	101
	APPENDICE I : TABLEAUX.....	105
	APPENDICE II : FIGURES.....	114
	APPENDICE III : RÉSULTATS COMPLÉMENTAIRES.....	133

1. Introduction

La gestion du risque dans le domaine de l'investissement devient de plus en plus importante. De plus, cette dernière ne semble pas être indépendante des rendements associés aux investissements. Depuis quelques années, une importante littérature soulève certaines anomalies quant à la relation entre le risque et le rendement de certains actifs. C'est le cas, par exemple, du concept *Betting against beta* de Frazzini et Pedersen (2014) qui présentent une relation négative entre le bêta des titres et leur rendement espéré, ce qui semble entrer en contradiction directe avec la théorie financière classique. Le concept du *low-volatility investing* est également à la mode dans la littérature moderne. Baker, Bradley et Wurgler (2011) tentent, par exemple, d'expliquer les raisons de cette relation négative par les limites d'arbitrage qui découlent de contraintes propres à certains investisseurs.¹

La gestion des risques en investissement a également vu naître le concept de parité de risque (*risk parity*), où chaque actif est pondéré de sorte que le risque provenant de chaque actif soit équivalent dans le portefeuille créé. Asness, Frazzini et Pedersen (2012) démontrent que les actifs moins risqués ont souvent un rendement par unité de risque plus élevé parce que quelque peu délaissés par les investisseurs ayant des contraintes sur l'utilisation de levier financier et des cibles de rendements précises. La méthodologie de surpondération des actifs les moins risqués dans un portefeuille au détriment des actifs les plus risqués (*volatility-scaling*), par l'utilisation massive du levier financier, serait la base même de certains résultats obtenus dans la littérature. Par exemple, Kim, Tse et Wald (2016) discutent de l'importance de la composante de

¹ Pour les lecteurs intéressés, Harvey, Liu et Zhu (2016) proposent une liste importante de facteurs de risque et d'anomalies soulevés dans la littérature financière. Les auteurs proposent également un cadre méthodologique pour distinguer les réels facteurs et anomalies des résultats induits par une mauvaise interprétation statistique.

volatility-scaling dans l'allocation d'actifs pour expliquer les résultats de tests de la présence de momentum temporel dans le marché des contrats à terme boursiers. Ils concluent que cette méthodologie d'allocation conduit aux résultats de création de valeur, plus que le momentum des rendements comme tel.

Plusieurs travaux utilisent les bases du concept de *volatility-scaling* pour la construction de portefeuille, tout en utilisant des stratégies d'allocation différentes selon l'objectif visé.² Dreyer *et al.* (2016) et Moreira et Muir (2017) font partie de cette littérature qui tentent de comprendre les aspects théoriques et empiriques qui font naître la valeur ajoutée positive générée par ce type de stratégie. La littérature ne considère cependant que brièvement l'aspect de l'horizon de placement quant aux résultats empiriques obtenus. Pour la mise en application pratique par un investisseur, ce questionnement est d'importance puisque la nécessité de déployer le capital dans une même stratégie suffisamment longtemps pour créer une valeur significative peut augmenter le risque qui découle de la décision d'allocation d'actifs.

En conclusion, malgré le désaccord sur le sens de la relation entre le risque et le rendement, la littérature sur le *volatility-scaling* demeure en accord avec la théorie financière classique sur l'importance de traiter ceux-ci conjointement pour tirer le maximum du contenu informationnel disponible pour la construction intelligente de portefeuille.

Ce mémoire est divisé en quatre parties distinctes et complémentaires. Successivement, chaque partie aide à la bonne compréhension des parties suivantes. La première partie propose un bref retour sur les travaux de Moreira et Muir (2017). Les trois parties suivantes traitent des différentes contributions du mémoire apportées à la littérature sur le *volatility-scaling*. La première contribution approfondie la

² Par exemple, la stratégie de *risk-parity* considère le « point d'équilibre » de l'allocation comme étant que chaque actif ait le même niveau de risque pour le portefeuille. Moreira et Muir (2017) vise plutôt ce « point d'équilibre » en fonction de la constance visée sur le prix du risque.

compréhension du mécanisme de création de valeur de la stratégie dynamique proposée par Moreira et Muir (2017). La seconde contribution quantifie l'impact de l'horizon de placement sur la création de la valeur ajoutée créée par l'application de la stratégie dynamique. Finalement, la troisième contribution est la proposition d'une stratégie d'allocation dynamique au facteur de marché similaire à celle de Moreira et Muir (2017) mais, cette fois-ci, à N actifs risqués. Ces contributions sont divisées par différentes sections du présent mémoire.

La section 2 de ce mémoire présente la stratégie d'allocation active de l'exposition aux facteurs de risque proposée par Moreira et Muir (2017) et ses principaux résultats sur l'échantillon original de 1926 à 2017. La section 3 se consacre aux méthodes de simulation utilisées pour tester la relation entre l'horizon de placement et la valeur créée par l'allocation dynamique de l'exposition au facteur de marché. La section 4 présente les principaux résultats de cette relation et la section 5 tente de poser les bases de l'inclusion de l'allocation transversale dans la méthodologie originale de construction du portefeuille. Enfin, la section 6 présente les conclusions ainsi que les avenues de recherche futures.³

³ Le lecteur est prié de noter que dans la totalité du mémoire, le genre masculin est attribué au terme d'investisseur par seul souci de légèreté de l'écrit.

2. Retour sur les travaux de Moreira & Muir

Les travaux de Moreira et Muir (2017), ci-après MM, présentent une stratégie d'investissement simple basée sur une allocation temporelle de l'exposition à des facteurs de risque: le facteur de marché (Mkt), de taille (SMB), de valeur (HML), de momentum (Mom), de profitabilité (RMW), de rendement (ROE), d'investissement (CMA et IA), de *betting-against-beta* (BAB) et de *carry trade* sur les devises (FX). Pour la suite de ce mémoire, l'accent sera mis sur un seul de ces facteurs, le risque de marché. La stratégie dynamique proposée par MM s'appuie sur l'exploitation de la différence de persistance dans les deux premiers moments de la distribution conditionnelle des rendements. En effet, le premier moment, soit l'espérance du rendement, demeure insensible aux variations rapides de la variance conditionnelle mensuelle. Au contraire, la variance conditionnelle est très sensible à ses propres variations précédentes.

2.1 Méthodologie des travaux de Moreira & Muir

Une grande partie de la suite de ce travail se base sur la stratégie dynamique proposée par MM. Une analyse en profondeur de certains aspects est alors nécessaire à la compréhension des hypothèses posées dans les sections suivantes.

2.1.1 Persistance des deux premiers moments des rendements

Les deux premiers moments du processus générateur des rendements boursiers observés, soit l'espérance et la variance, ont des caractéristiques particulières et distinctives qui forment la raison même de l'allocation temporelle de l'exposition au facteur de marché.

Le rendement

Les rendements du marché boursier étant difficilement prévisibles, les travaux de Beller, Kling et Levinson (1998), Dimson, Marsh et Staunton (2003), Bollerslev, Tauchen et Zhou (2009) et Pástor et Stambaugh (2012) défendent l'utilisation de la moyenne historique du rendement comme bon prédicteur de son espérance. En fait, il est difficile de prévoir les rendements en ayant des erreurs prévisionnelles significativement plus petites qu'en utilisant une moyenne historique. MM vont en ce sens et n'attribuent donc aucune modélisation à la prévision du rendement autre qu'une constante. Peu importe les rendements passés réalisés et la variance conditionnelle passée, le rendement espéré conditionnel à l'information disponible au temps t de la prochaine période risque fort bien d'être près de sa moyenne historique.

Il est toutefois à noter que plusieurs méthodes statistiques peuvent être utilisées afin de gagner en qualité prévisionnelle des rendements, comme le démontrent les travaux, non-exhaustifs, de Rapach, Strauss et Zhou (2010), Neely *et al.* (2014), Faria et Verona (2017), Lie *et al.* (2017), Huang *et al.* (2017a), He, Huang et Zhou (2018), Huang, Zhang et Zhou (2018). Bien que ces méthodes ne réussissent bien souvent à n'expliquer qu'une faible proportion de la variation des rendements, le pouvoir explicatif est suffisant pour permettre un gain réel d'utilité pour les investisseurs. Somme toute, les travaux de MM ne s'inscrivent pas dans cette littérature de prévision de rendements. L'un des intérêts importants des travaux de MM est plutôt la proposition d'une stratégie simple étant capable d'ajouter une valeur significative. Cette valeur créée soulève alors un conflit, ou du moins une sérieuse irrégularité, entre la théorie financière classique et les données empiriques.

La variance

Contrairement aux rendements, le deuxième moment de la distribution, la variance conditionnelle des rendements, réagit fortement aux chocs de variance conditionnelle. Un choc est ici entendu comme une hausse soudaine de la variance conditionnelle. Ainsi, après une hausse de la variance pour une période particulière, la

variance de la période suivante devrait encore refléter le choc, en étant également plus élevée que la moyenne historique. Cette caractéristique de la variance crée le principe même de l'hétéroscédasticité. Il existe donc différents régimes de volatilité dans les marchés boursiers. En d'autres mots, il y a des périodes dans lesquelles la volatilité demeure faible et il en existe d'autres pour lesquelles la volatilité demeure élevée durant un certain temps.

Ce principe qu'est l'hétéroscédasticité peut être facilement représenter par les hautes premières autocorrélations qui existent dans la variance conditionnelle. Il existe donc une mémoire importante à la variance, contrairement au premier moment de la distribution des rendements.

2.1.2 Déséquilibre temporel du prix du risque

Selon la théorie financière classique, une hausse du risque – une hausse de la variance d'une période – devrait être accompagné d'une hausse de l'espérance de rendement. Si la théorie classique était respectée empiriquement, un investisseur se retrouverait compensé adéquatement pour sa prise de risque supplémentaire. Définissons, le prix du risque tel que :

$$\gamma_t = \frac{mkt_t - rf_t}{\sigma_t^2} = \frac{r_{m,t}}{\sigma_t^2} . \quad (2.1)$$

Dans l'équation 2.1, mkt_t représente le rendement du facteur de marché au temps t , rf_t représente le rendement du taux sans risque à t et σ_t^2 représente la variance conditionnelle du marché à t . Également, $r_{m,t}$ est ici défini comme le rendement excédentaire au temps t . Puisque les investisseurs sont forcés de faire leurs choix sur des bases prévisionnelles, il est possible de réécrire l'espérance du prix du risque à $t+1$ comme étant :

$$E_t[\gamma_{t+1}] = \frac{E_t[r_{m,t+1}]}{E_t[\sigma_{t+1}^2]} , \quad (2.2)$$

Pour en revenir à la théorie classique, en lien avec l'équation 2.2, si le risque du marché devait augmenter de sorte que la valeur de $E_t[\sigma_{t+1}^2]$ devenait plus élevée, l'espérance du rendement excédentaire, $E_t[r_{m,t+1}]$, devrait augmenter pour que l'espérance du prix du risque, $E_t[\gamma_{t+1}]$, soit plutôt stable au fil du temps. Empiriquement, ce n'est pas toujours le cas. Le prix du risque fluctue de période en période. Donc, comparativement à la théorie classique, ces variations représentent des déséquilibres temporels puisqu'à l'équilibre, théoriquement, les variations devraient être faibles.

Empiriquement, la différence dans la mémoire des deux premiers moments cause ces déséquilibres temporels dans le prix du risque. Comme le rendement excédentaire se comporte de telle sorte qu'il ne réagit que faiblement aux chocs dans la variance conditionnelle et que ces chocs se répercutent sur cette dernière pendant un plus grand laps de temps, il est aisé de constater qu'une hausse de la variance conditionnelle sur une période donnée a pour effet de compresser le prix du risque sur les périodes subséquentes. Théoriquement, seulement qu'en regardant le comportement de l'équation 2.1, le déséquilibre demeurera tant que la variance conditionnelle ne sera pas redescendue aux alentours de sa moyenne non-conditionnelle ou alors que le rendement n'aura pas augmenté de façon à contrer la hausse de la variance conditionnelle, ou encore une combinaison de ces deux faits.

MM, en présentant les différences dans la persistance et dans la vitesse d'ajustement des deux premiers moments à la nouvelle information disponible, soit le choc de variance, soulèvent la question d'allocation dynamique de l'exposition au marché en fonction du prix du risque. Ainsi, lorsque la variance conditionnelle est faible au temps t , un investisseur devrait en profiter pour augmenter son exposition au facteur de marché, étant donné l'augmentation prévisible du prix du risque à $t+1$. À l'inverse, en cas de hausse de la variance conditionnelle au temps t , ce qui laisse présager un faible prix du risque à $t+1$, l'investisseur devrait limiter son exposition au

marché, en augmentant la proportion de son portefeuille investie dans le titre sans risque.

2.1.3 Épargne et consommation d'unités de risque

Il est possible de penser au mécanisme d'allocation de l'actif en termes de budget de risque. Dans l'exemple suivant, mettons à la disposition de l'investisseur un titre risqué, comme le portefeuille de marché, et un titre sans risque auquel l'investisseur peut à la fois emprunter et investir. Cet investisseur peut désirer ou devoir maintenir une certaine exposition au marché et, parallèlement, maintenir un niveau de risque moyen tout au long de son horizon de placement. Par exemple, ledit investisseur pourrait devoir maintenir un niveau de risque égal à celui du portefeuille de marché. Dans ce contexte, si au temps t la variance conditionnelle augmente, annonçant une grande variance conditionnelle au temps $t+1$, l'investisseur devrait diminuer son exposition au marché pour la période $t+1$ en allouant une partie de son portefeuille dans le titre sans risque. À $t+1$, à cause de la grande variance conditionnelle prévue, le prix du risque devrait être petit et l'investisseur n'obtiendrait alors qu'un faible retour par unité de risque. À ce point-ci, l'investisseur qui aurait diminué son exposition au marché aurait également épargné une partie de son budget de risque. Selon une logique semblable, en temps d'accalmie, défini comme une période où la variance conditionnelle est basse, le prix du risque deviendrait attrayant, toujours sous l'hypothèse que l'espérance du rendement ne s'ajusterait pas suffisamment pour maintenir le prix du risque constant dans le temps. Ainsi, l'investisseur qui avait épargné une partie de son risque pourrait alors emprunter au taux sans risque pour mettre à levier le portefeuille de marché, dépensant par le même coup son épargne en risque. Finalement, cet investisseur aurait alors obtenu un risque d'investissement sur son portefeuille équivalent au portefeuille de marché mais aurait tiré avantage des moments opportuns pour récolter un plus grand rendement pour chaque unité de risque dépensée.

De façon ultimement simpliste, c'est de cette manière que MM proposent de tester la vitesse d'ajustement des deux composantes du prix du risque, soit le numérateur, le premier moment, et le dénominateur, le second moment. MM tentent alors de démontrer que des déséquilibres du prix du risque ne pouvant être expliqués par la théorie financière classique existent. Une anomalie apparaît donc s'il est effectivement possible pour un investisseur de créer une valeur ajoutée significative en allouant son capital en fonction de la variance conditionnelle passée. Pour se faire, il est nécessaire que l'information nécessaire à l'investisseur pour mettre en place la stratégie soit disponible *a priori*. MM proposent une mise en application qui respecte cette condition à l'exception d'un seul aspect, soit une constante d'ajustement calculée de façon *ex post*.

2.1.4 Modélisation du prix du risque

Les travaux de MM sont étroitement liés à l'évolution temporelle du prix du risque. Par contre, même s'il est aisé de mesurer le prix du risque une fois celui-ci vécu, cette mesure a un intérêt limité. Le principal objectif étant de profiter des variations du prix du risque pour créer une valeur ajoutée à notre portefeuille, il est plutôt nécessaire de considérer l'espérance du prix du risque. La définition mathématique de celui-ci est présentée précédemment à l'équation 2.2. Cette section présente plus précisément la modélisation et les prédictors de l'espérance du rendement excédentaire et l'espérance de la variance conditionnelle utilisés dans les travaux de MM.

MM utilisent certaines simplifications dans la modélisation du prix du risque. Or, tel que discuté précédemment à la section 2.1.1, ils substituent l'espérance du rendement excédentaire par une constante (μ). Pour l'espérance de la variance conditionnelle, en raison du fait que la première autocorrélation est élevée, les auteurs utilisent l'approximation que l'espérance de la variance conditionnelle pour la période suivante est égale à la variance conditionnelle de la dernière période (σ_t^2). Donc, selon la méthodologie qu'ils proposent, l'espérance conditionnelle du prix du risque ($E_t[\gamma_{t+1}]$) devient :

$$E_t[\gamma_{t+1}] = \frac{\mu}{\sigma_t^2} . \quad (2.3)$$

2.1.5 Modélisation de l'allocation temporelle du risque

Une autre caractéristique importante de la méthodologie proposée par MM est le mécanisme d'attribution de l'allocation dynamique de l'exposition au marché. En d'autres mots, comment modéliser la proportion à investir dans l'actif risqué et l'actif sans risque? Pour ce faire, les auteurs définissent la proportion investie dans le marché au temps t comme étant l'inverse de la variance conditionnelle passée des rendements du marché au temps $t-1$, soit

$$w_t = \frac{1}{\sigma_{t-1}^2} . \quad (2.4)$$

La dernière composante méthodologique nécessaire pour construire le portefeuille est une constante d'ajustement qui permet au portefeuille d'investissement d'avoir le même niveau de risque que celui d'une stratégie passive où l'investisseur n'aurait investi que dans le portefeuille de marché sur l'ensemble de la période. Une fois la constante d'ajustement prise en compte, le poids alloué au marché devient :

$$w_t = \frac{c}{\sigma_{t-1}^2} \quad (2.5)$$

et le rendement mensuel du portefeuille géré activement est alors :

$$PTF_t = \frac{c}{\sigma_{t-1}^2} \cdot (mkt_t - rf_t) + rf_t . \quad (2.6)$$

En définissant le prix du risque tel que :

$$\gamma_t = \frac{(mkt_t - rf_t)}{\sigma_{t-1}^2} , \quad (2.7)$$

le rendement du portefeuille peut être réécrit comme :

$$PTF_t = \gamma_t \cdot c + rf_t . \quad (2.8)$$

Dans les équations 2.5, 2.6, 2.7 et 2.8, c est la constante d'ajustement nécessaire discutée, PTF_t représente le rendement du portefeuille géré activement à t , mkt_t , celui du marché à t et rf_t , celui du taux sans risque à t . σ_{t-1}^2 est la variance conditionnelle du marché à $t-1$.

Pour rendre compte de la condition que la variance non-conditionnelle de la stratégie soit égale à la variance non-conditionnelle du marché, MM définissent la constante d'ajustement comme la partie positive de l'équation 2.9, ci-dessous. Le cheminement mathématique menant à celle-ci est démontré ici :

$$\sigma_{mkt}^2 = \sigma_{PTF}^2$$

$$\sigma_{mkt}^2 = Var(\gamma \cdot c + rf)$$

$$\sigma_{mkt}^2 = \sigma_\gamma^2 \cdot c^2 + 2 \cdot \sigma_{\gamma, rf} \cdot c + \sigma_{rf}^2$$

$$0 = \sigma_\gamma^2 \cdot c^2 + 2 \cdot \sigma_{\gamma, rf} \cdot c + (\sigma_{rf}^2 - \sigma_{mkt}^2)$$

$$c = \frac{-2 \cdot \sigma_{\gamma, rf} \pm \sqrt{(2 \cdot \sigma_{\gamma, rf})^2 - 4 \cdot \sigma_\gamma^2 \cdot (\sigma_{rf}^2 - \sigma_{mkt}^2)}}{2 \cdot \sigma_\gamma^2} . \quad (2.9)$$

La constante d'ajustement, c , fait en sorte d'ajuster périodiquement l'exposition de la stratégie dynamique au risque de marché, de façon à ce que la variance des rendements de celle-ci, sur l'ensemble de la période, soit la même que celle d'une stratégie passive où l'investisseur serait pleinement investi dans le marché.

Par ailleurs, la constante permet un lissage de la variance du portefeuille à travers les différents régimes de volatilité du marché. Pour illustrer mathématiquement cette affirmation, il suffit de constater la simplification mathématique de la variance du portefeuille lorsque le poids est défini comme étant la volatilité conditionnelle du marché, σ_t , au lieu d'être la variance conditionnelle du marché, σ_t^2 , et de faire abstraction des erreurs de prévision de la volatilité conditionnelle. Il ne s'agit que de modifications simples qui ne changent pas la philosophie de la proposition de MM mais qui permettent de mieux illustrer l'idée du lissage de la variance du portefeuille.

$$\sigma_{PTF,t}^2 = w_t^2 \cdot \sigma_{mkt,t}^2 \quad \text{où} \quad w_t = \frac{c}{\sigma_{mkt,t-1}^2}$$

$$\sigma_{PTF,t}^2 = \left(\frac{c}{\sigma_{mkt,t-1}}\right)^2 \cdot \sigma_{mkt,t}^2 \quad \text{où} \quad \sigma_{mkt,t-1} = \sigma_{mkt,t}$$

$$\sigma_{PTF,t}^2 = c^2. \tag{2.10}$$

Par hypothèse, la variance du portefeuille deviendrait alors une constante et l'investisseur pourrait gérer son exposition de façon dynamique pour égaliser la volatilité de son portefeuille à travers les différentes périodes, d'où l'idée du lissage de volatilité.

Toujours dans les travaux de MM, la variance conditionnelle est modélisée par le calcul de la variance réalisée.⁴ Ceci implique que la fréquence des observations primaires doit être plus élevée que celle du rebalancement, par définition. C'est pourquoi les auteurs utilisent les données journalières pour calculer la variance

⁴ MM considèrent aussi l'utilisation de l'espérance de la variance conditionnelle au lieu de la variance conditionnelle réalisée. L'espérance est calculée par des régressions utilisant le logarithme des trois dernières variances conditionnelles du marché. Les auteurs font également référence aux travaux de Ang (2014) pour d'autres méthodes prévisionnelles à l'aide du *Implied Volatility Index* (VIX). MM notent que l'augmentation de la précision des prévisions de variances conditionnelles est généralement synonyme de gains de performance au niveau du rendement ajusté pour le risque de la stratégie.

mensuelle réalisée (RV pour *realized variance*) à $t-1$, laquelle est ensuite utilisée pour rebalancer le portefeuille de la stratégie dynamique à la période t . Cette mesure de risque s'exprime donc telle que :

$$RV_t = \sigma_t^2 = \sum_{d=1/t}^1 \left(r_{t+d} - \frac{\sum_{d=1/t}^1 r_{t+d}}{1/t} \right)^2, \quad (2.11)$$

où td représente le nombre de jours d'activité dans la période de rebalancement et r_{t+d} les rendements journaliers réalisés durant la période.

2.2 Réplication des résultats importants

Afin de bien comprendre le comportement empirique de la stratégie dynamique proposée par MM, il est nécessaire de présenter certains résultats. Ceux-ci aideront à faire la lumière sur certaines caractéristiques importantes menant à la valeur ajoutée qu'apporte cette stratégie dynamique, par rapport à une stratégie passive.

À des fins de réplication et de façon à s'assurer de l'application précise de la méthodologie, certains résultats sont ici présentés en utilisant les données publiques de Kenneth French pour les données journalières et mensuelles du facteur de marché (Mkt), du facteur de taille (SMB), du facteur de valeur (HML) et du facteur de momentum (Mom). Bien que l'article original utilise l'échantillon allant de juillet 1926 à décembre 2015, l'échantillon utilisé ici s'étire jusqu'à décembre 2017 inclusivement.⁵

2.2.1 Régressions linéaires et alphas générés

Cette section a pour objectif de montrer que la stratégie dynamique proposée par MM ajoute de la valeur à une stratégie purement passive, une fois pris en compte

⁵ Les données sont disponibles au http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html

le risque des deux stratégies. Pour ce faire, les rendements de la stratégie dynamique sont régressés sur ceux de la stratégie passive. La régression évaluée est donc la suivante :

$$facteur\sigma_t = \alpha + \beta facteur_t + \varepsilon_t .$$

Bien que l'intérêt du présent mémoire porte principalement sur l'application de la stratégie dynamique au facteur de marché, dans cette section, la stratégie est aussi appliquée aux autres facteurs de risque qui ont été mentionnés plus tôt, soient SMB, HML et Mom. Ceci explique la notation utilisée dans l'équation précédente. Ainsi, dans cette équation, $facteur\sigma_t$ représente les rendements générés par la stratégie dynamique de MM lorsque celle-ci est appliquée au facteur Mkt, SMB, HML et Mom, respectivement. D'un autre côté, $facteur_t$ représente les rendements qu'aurait réalisé un investisseur qui aurait placé son argent de façon passive dans chacun de ces facteurs. Si la stratégie dynamique appliquée à chaque facteur génère des rendements excédentaires par rapport à une stratégie passive, le α des régressions devrait être significativement supérieur à zéro. Le terme ε_t ne représente qu'un terme d'erreur, soient les mouvements du facteur géré activement qui ne peuvent être expliqués par le facteur passif. Enfin, de façon à s'assurer que les rendements générés par les stratégies dynamiques ne sont pas dus à des facteurs de risque qui ne sont pas pris en compte par les régressions simples, des régressions multiples sur les facteurs de risque identifiés par Fama et French (1992) sont aussi évaluées. Les résultats sont présentés au tableau 2.1.⁶

Tableau 2.1 ici

Malgré l'ajout de deux années à l'échantillon utilisé par MM, les résultats ici présentés sont pratiquement les mêmes que ceux de ces auteurs.⁷ Ainsi, comme le

⁶ Le lecteur trouvera l'ensemble des tableaux présentés dans ce mémoire à l'appendice I.

⁷ Voir leur tableau 1 p.1619.

montre le tableau 2.1, à l'exception du facteur de SMB, l'application de la stratégie dynamique à tous les autres facteurs génère un alpha significativement supérieur à zéro, lorsque l'on contrôle seulement pour les rendements d'une stratégie d'investissement qui serait passive par rapport à chacun des facteurs. Dans le cas du facteur de marché, la stratégie dynamique génère, sur l'ensemble de la période, un rendement excédentaire de plus de 5 % annuellement, comparativement à une stratégie purement passive. Enfin, dans l'ensemble, les résultats demeurent pratiquement inchangés, lorsque l'on contrôle pour les facteurs de risque de Fama et French (1992).

Bien que l'alpha du portefeuille de marché géré dynamiquement soit positif, le tableau ne renseigne aucunement sur les raisons sous-jacentes. En outre, les travaux de MM soulèvent eux-mêmes, après une batterie de tests, le fait que la finance théorique ne parvient pas à expliquer ces résultats et que la question de l'explication de la valeur créée demeure ouverte. Pour avoir une compréhension générale des effets de la stratégie dynamique proposée par MM, la prochaine section présente des résultats empiriques supplémentaires eu égard à l'application de cette stratégie sur la période 1926 à 2017.

2.2.2 Performance cumulative

Cette section présente l'évolution de la création de la valeur de la stratégie dynamique. Plusieurs mesures de performance sont présentées, des explications sont fournies et les interactions entre certaines variables du marché, comme la variance, le rendement moyen, les *drawdowns* et les probabilités de récession, sont présentées.

Pour avoir une idée claire de l'impact de la valeur ajoutée créée par la stratégie dynamique, la figure 2.1⁸ présente graphiquement la performance relative du portefeuille passif de marché en comparaison avec un portefeuille géré activement selon la variance conditionnelle sur tout l'échantillon de juillet 1926 à décembre 2017.

⁸ L'ensemble des figures utilisées dans ce mémoire sont regroupées à l'appendice II.

L'échelle de gauche, graduée en dollars, permet de voir l'évolution de 1 \$ investi passivement dans le marché en août 1926 et aussi l'évolution de 1 \$ investi dans la stratégie dynamique à la même date. Pour mieux visualiser les raisons qui expliquent les grands écarts de performance à certains moments, une moyenne mobile de 12 mois de l'exposition au facteur de marché de la stratégie dynamique est aussi présentée. L'échelle de droite permet de mesurer cette exposition moyenne. Également, à titre indicatif, les périodes de *drawdowns* du facteur de marché supérieurs à 20 % sont ombragées.

Figure 2.1 ici

Après plus de 90 ans, la valeur du dollar investi passivement vaut près de 6000 \$ alors que le dollar investi activement dans la stratégie dynamique vaut plus de 37000 \$. Il est aussi intéressant de noter la variation de l'exposition au marché au fil du temps. Par exemple, lors de la période des années 1932-1933, le portefeuille est investi en moyenne à 92 % dans le titre sans risque. Il s'agit de la période de la Grande Dépression. Au contraire, le portefeuille utilise le levier financier de façon importante dans les 1960 (pendant les années 1963 à 1965, en moyenne, 487 % du portefeuille de la stratégie dynamique est investi dans le marché).

De plus, l'exposition allouée au facteur de marché diminue systématiquement à l'orée des périodes de *drawdowns* (qui correspondent par ailleurs assez fidèlement aux périodes de récession) et reste également basse durant la reprise. Ces périodes-ci sont souvent caractérisées par d'importantes hausses du marché, causant du même coup une variance conditionnelle élevée. La performance du portefeuille géré activement aux environs de 1932 à 1935 illustre ce point. Comme on peut le voir à la figure 2.1, sur cette période, la valeur de la stratégie dynamique varie peu, comme le révèle l'aspect horizontale de la ligne représentant l'évolution de la valeur de la stratégie dans le temps. Dans ces périodes, le réel avantage de la stratégie se trouve dans l'économie de risque. Cette épargne de risque permet d'elle-même l'utilisation

importante du levier financier dans d'autres décennies de l'échantillon.⁹ Cette observation soulève le constat de la réduction de l'exposition au risque de marché durant les périodes caractérisées par d'importants *drawdowns*. Cette réduction d'exposition permet d'épargner fortement en peu de temps sur le budget de risque. En effet, les *drawdowns* importants, comme ceux vécus par le marché dans les années 1930 ou 2008 par exemple, ne sont que l'accumulation de rendements négatifs et surviennent habituellement dans les périodes de grande volatilité conditionnelle du marché.

Pour mieux comprendre les raisons de la création de valeur de la stratégie dynamique, la figure 2.2 présente l'interaction de l'espérance de la variance conditionnelle, avec le rendement, le rendement ajusté pour le risque, les *drawdowns* et les probabilités de récession. Chaque statistique est mesurée conditionnellement aux régimes de variance du marché. Les différents régimes de variance conditionnelle sont représentés en quintiles. Toutes les prévisions de la variance conditionnelle sont alors classées en ordre croissant et sont ensuite divisées en cinq groupes de même taille. Par exemple, le premier quintile représente les 20 % plus petites prévisions de la variance conditionnelle. Spécifiquement, il s'agit des 219 mois de l'échantillon original avec les plus petites prévisions de la variance conditionnelle. À l'opposée, le cinquième quintile contient les 219 observations contenues dans les périodes où les prévisions de la variance conditionnelle étaient les plus grandes.

Ensuite, pour toutes les observations contenues dans un régime de variance, il est possible de mesurer la statistique voulue. Par exemple, le premier quintile du quadrant *Rendement moyen* représente le rendement moyen annualisé calculé pour les 219 mois où les prévisions de la variance conditionnelle étaient les plus petites. Similairement, les premiers quintiles des quadrants *Écart-type* et *Drawdown moyen*

⁹ La stratégie est construite de façon à maintenir un budget de risque donné sur l'ensemble de la période allant de 1926 à 2017. Par conséquent, les périodes où la stratégie est fortement investie dans le titre sans risque, et où le budget de risque n'est pas sollicité, peuvent être suivies (ou précédées) de périodes où le portefeuille utilise le levier financier.

représentent respectivement l'écart-type annualisé des rendements de ces mêmes 219 mois de faibles prévisions et les *drawdowns* moyens vécus. Pour sa part, le quadrant $E[R]/Var[R]$ présente le rendement moyen annualisé, calculé par unité de risque, pour chaque régime de variance conditionnelle. Le premier quintile de ce quadrant est donc la valeur du premier quintile du quadrant *Rendement moyen* divisée par le carré de la valeur du premier quintile du quadrant *Écart-type*, puisque l'unité de mesure du risque est ici la variance des rendements et non l'écart-type. Pour le quadrant *Probabilité de récession*, les probabilités de récession sont évaluées en calculant le nombre moyen de mois par régime de variance conditionnelle où une récession était indiquée par le *National Bureau of Economic Research* (NBER).

Figure 2.2 ici

Ainsi, le quadrant *Rendement moyen* présente le fait que les rendements moyens ne semblent pas être affectés par les régimes de variance conditionnel. Pourtant, le quadrant *Écart-type* montre que l'écart-type des rendements augmente de façon monotone à chaque quintile de variance conditionnelle, ce qui est attendu par la construction même du graphique. La résultante de ces deux observations est que le rendement ajusté pour le risque diminue de façon monotone avec l'augmentation de la variance conditionnelle, comme il est possible de le constater dans le quadrant $E[R]/Var[R]$. Cette illustration graphique représente bien la philosophie de la stratégie dynamique de tirer avantage des variations temporelles du prix du risque.

2.2.3 Signalement de changement de régime

La prévision des changements de régime est d'importance capitale en gestion de portefeuille et est difficilement modélisable. C'est sans doute pourquoi il existe une littérature importante sur ce sujet. Nommons, entre autres, les travaux de Pagan et Sossounov (2003), Ang et Bekaert (2003), Stock et Watson (2004), Bekiros et Georgoutsos (2008), Chen (2009), Maheu, McCurdy et Song (2012), Kole et van Dijk (2014), Berge (2015), Choudhry, Papadimitriou et Shabi (2016) et Huang *et al.*

(2017b). Tous ces articles ont pour point commun de démontrer l'importance de juger des changements de régime dans le cadre de la gestion des investissements.

La stratégie dynamique proposée par MM semble avoir un comportement pouvant se rattacher, du moins en partie, à cette littérature sur les changements de régime. En effet, dans la figure 2.2, le quadrant *Probabilité de récession* présente l'augmentation monotone du risque de récession en fonction de la hausse de la variance conditionnelle. Cette observation sur la relation positive entre le risque de récession et la variance conditionnelle appuie l'idée que cette dernière peut être une variable prédictive d'un changement de régime du marché boursier. Comme la stratégie d'allocation dynamique préconise une exposition limitée au facteur de marché lorsque la variance conditionnelle est élevée, un investisseur serait alors moins investi dans le marché lorsque le risque de récession devient plus important. Bien que récession économique ne soit pas synonyme de changement de régime des marchés boursiers, la figure 2.2 présente un rapprochement possible entre les deux concepts. En effet, les quadrants *Probabilité de récession* et *Drawdown moyen* ont un comportement similaire et inverse en fonction de la variance conditionnelle du marché. En d'autres mots, plus la variance conditionnelle augmente, plus les probabilités de récession augmentent et, simultanément, plus il y a de chances qu'un important *drawdown* soit vécu. Durant ces périodes de grandes variance conditionnelles, par l'allocation importante au titre sans risque, la stratégie dynamique permet alors de diminuer les pertes encourues conséquentes aux changements de régime.

La figure 2.3 montre graphiquement la valeur ajoutée de la stratégie dynamique par rapport au marché par l'évolution temporelle du ratio de la valeur de chaque portefeuille, soit la valeur du portefeuille géré activement, divisée par celle du portefeuille de marché passif. La ligne pointillée permet de constater la tendance linéaire de ce ratio. De plus, les *drawdowns* du marché sont aussi représentés et peuvent être mesurés sur l'échelle de droite, qui a été inversée.

Figure 2.3 ici

Graphiquement, il est possible d'apercevoir que, lors d'une phase de correction négative du marché, la stratégie crée une valeur ajoutée importante. Il serait par contre faux d'attribuer toutes les périodes de grande création de valeur aux périodes de correction négative, cette création n'étant pas seulement fonction de ces corrections. Par exemple, la stratégie dynamique crée une grande valeur ajoutée pendant l'important *drawdown* des années 1930. La stratégie réagit de façon similaire aux périodes de corrections négatives des années 1973, 2001 et 2008. Cependant, comme il est mentionné ci-haut, la valeur ajoutée n'est pas seulement créée durant ces périodes de baisses de marché, comme le démontre bien la hausse importante du ratio des valeurs des deux portefeuilles définis dans les années 1960.

Malgré l'importante création de valeur dans les périodes de correction négative du marché, une importante part de cette valeur créée se perd durant les reprises. La variance conditionnelle du marché semble bien prévoir l'arrivée des sommets du marché mais incapable de prédire celle des creux. Ainsi, on constate, dans la figure 2.3, que les hausses rapides du ratio des valeurs sont souvent suivies par de rapides diminutions. De plus, l'attribution de la valeur ajoutée n'est pas créée qu'au signalement de changement de régime puisque celle-ci suit une tendance haussière plutôt constante sur l'échantillon complet.

La stratégie dynamique limite donc son exposition au facteur de marché lors des grands mouvements du marché, tant les corrections négatives que les reprises, par l'incapacité de la variance conditionnelle à prévoir les creux. Donc, une seconde conséquence de cette allocation, outre la création de valeur, doit être considérée. Limiter l'exposition aux forts mouvements du marché – économiser le risque disponible – c'est devenir dépendant envers le futur, ou encore, dans le cas d'un ajustement *ex post*, envers le comportement complet des variances conditionnelles sur l'ensemble de la période. La dépendance provient du besoin de dépenser par la suite le

risque épargné à un moment opportun. C'est donc grâce au signalement des grands mouvements du marché qu'il devient possible d'accumuler une grande valeur ajoutée lors des périodes calmes, par l'utilisation du levier financier. MM discutent du rôle de ce phénomène par le biais de l'analyse de la volatilité de la variance. Ils démontrent alors, que, théoriquement, la valeur ajoutée devrait être positivement reliée à la volatilité de la variance. Ce concept, la volatilité de la variance, peut être observé dans le contexte des marchés boursiers par la présence de différents régimes de variances conditionnelles. En d'autres mots, les périodes de faible variance conditionnelle sont suivies de périodes de variance conditionnelle élevée. Donc, pendant un certain temps, le marché connaît de petits rendements successifs – qu'ils soient positifs ou négatifs – jusqu'au changement de régime de variance conditionnelle. À ce point de rupture, ce même marché connaît, successivement, des rendements de grand ampleur, causant ainsi une variance conditionnelle élevée pendant cette période. Plus la différence entre les variances conditionnelles de ces différents régimes de variance est élevée, plus il est dit qu'il existe, dans l'échantillon, une grande volatilité de la variance. Dans le cadre de la stratégie dynamique proposée par MM, plus cette volatilité est élevée, plus il y a de chances que le concept d'épargne et de consommation de risque fonctionne en tirant pleinement avantage des différents régimes.

2.2.4 Aspect symétrique de la stratégie et tendance haussière

Malgré les observations de la section précédente, il n'est pas possible de conclure que la stratégie est simplement une question de relation entre les régimes de variance du marché et le changement de régime de rendements boursiers. Pourtant, l'aspect symétrique de la gestion des périodes de vives corrections tant à la baisse qu'à la hausse fait ressortir un comportement important de la stratégie proposée par MM. Comme l'allocation temporelle ne prend pas en compte la prévision du rendement du marché mais ne s'attarde que sur la variance conditionnelle de la période précédente, la distribution symétrique des rendements du marché devient un facteur important. Par exemple, la plupart des grands mouvements du marché ont leur contrepartie directe : Les grandes baisses sont souvent suivies de vifs rebonds et les périodes de calmes sont

la somme de petits rendements distribués aux alentours de la moyenne non-conditionnelle de l'échantillon. Pourtant, la variance conditionnelle ayant un faible pouvoir prédictif sur l'espérance de rendement, la stratégie dynamique a tendance à traiter chacune de ces contreparties de façon similaire en termes d'exposition au facteur de marché. Par exemple, l'allocation importante au taux sans risque dans les périodes de correction puis de reprise ne crée qu'une valeur ajoutée limitée mais permet d'épargner beaucoup de risque en peu de temps, comme expliqué à la section précédente. L'explication du comportement symétrique de la stratégie dynamique lors des périodes de calme est démontrée dans la suite de cette section. La figure 2.4 illustre la valeur ajoutée en fonction de la variance conditionnelle.

Figure 2.4 ici

L'axe de symétrie se voit bien comme étant une droite horizontale située près du zéro des ordonnées. La question demeure donc de comprendre la source de la valeur ajoutée si la variance conditionnelle n'est pas une variable prévisionnelle du rendement subséquent. Ce faible pouvoir prédictif semble alors causer des écarts avec le portefeuille passif d'amplitudes similaires tant positives que négatives, et ce, peu importe le niveau de la variance conditionnelle. En fait, comme on peut le voir dans la figure 2.4, lorsque la variance conditionnelle est de 0.42 %, soit la valeur de la constante d'ajustement, les différences de rendements entre le marché et la stratégie sont presque nulles. En effet, à ce niveau de variance conditionnelle, la stratégie est pleinement exposée au facteur de marché, sans toutefois utiliser de levier. Au contraire, plus la variance conditionnelle s'approche de zéro, plus la stratégie utilise abondamment le levier financier, d'où l'augmentation progressive de la dispersion des points à la gauche de la ligne verticale pointillée signalant le 0.42 % précédemment discuté. Par exemple, lorsque la variance conditionnelle est aux environs de 0.1 %, l'étendue des différences est près de 55 % (soit un intervalle allant de -20 % à 35 %). De façon similaire, la dispersion des points augmente aussi avec l'augmentation de la variance conditionnelle lorsque celle-ci est supérieure à 0.42 %. Dans ces cas, les

différences deviennent grandes puisque la stratégie s'expose graduellement de moins en moins au facteur de marché à mesure que la variance conditionnelle augmente.

Une composante du problème semble donc provenir de la combinaison des caractéristiques soulevées jusqu'ici. D'abord, l'épargne du risque en périodes de turbulence permet d'utiliser le levier financier pendant les périodes d'accalmie, de façon à consommer le risque épargné. D'un autre côté, les différences de rendements entre les deux portefeuilles, soient le portefeuille géré activement et le marché, semblent symétriquement dispersées positivement et négativement aux alentours de zéro. Pourtant, le marché connaît une tendance haussière sur l'échantillon. Cette tendance n'est évidemment pas respectée en tout temps.

La figure 2.5 exprime graphiquement les expositions moyennes au facteur de marché de la stratégie dynamique, en termes de poids alloué au marché, en fonction des rendements mensuels du marché. L'histogramme des poids moyens rappelle une loi normale centrée sur l'intervalle 0 % à 5 % des rendements du marché.

Figure 2.5 ici

L'importance des périodes de calme, souvent des périodes haussières, prend ici tout son sens. Dans la figure, on voit réapparaître l'effet de symétrie, mais cette fois-ci aux alentours de la moyenne mensuelle des rendements du marché. En d'autres mots, lors des grands mouvements du marché, soit les mouvements mensuels de plus ou moins 10 %, l'exposition au facteur marché, telle que dictée par la stratégie dynamique, devient inférieure à 1 puisque ces rendements importants sont pour la plupart la résultante d'une variance conditionnelle élevée. Au contraire, l'exposition au facteur marché du portefeuille géré activement devient supérieure à 1 lorsque les rendements mensuels sont plus modestes, soient à l'intérieur de plus ou moins 5 %. Au moins une partie de la valeur ajoutée provient du fait que le marché augmente, en moyenne.

2.2.5 Retour sur la théorie financière classique

Cette section a pour but de faire un retour sur la comparaison entre les résultats de la stratégie dynamique et la théorie financière classique. Après l'application de la stratégie dynamique proposée par MM, le portefeuille géré activement respecte la proposition de la théorie financière classique voulant qu'il existe une relation positive entre le risque et le rendement espéré d'un investissement. L'allocation en fonction des variations temporelles du prix du risque fait naître une relation positive entre le rendement espéré et le risque du portefeuille géré activement.

La figure 2.6 reprend l'analyse de certaines statistiques de la stratégie dynamique en fonction des quintiles de variance conditionnelle du marché. La construction de cette figure est tout-à-fait similaire à celle utilisée pour obtenir la figure 2.2 discutée précédemment. Encore une fois, le premier quintile représente, pour chaque quadrant, le comportement de la statistique analysée lorsque le marché connaît ses 20 % plus faibles prévisions de variance conditionnelle. De plus, la figure 2.6 reprend des statistiques présentées dans la figure 2.2, mais cette fois-ci, ces statistiques sont liées à la stratégie dynamique plutôt qu'au marché.

Figure 2.6 ici

Les quadrants *Rendement moyen* et *Écart-type* démontrent clairement que le rendement et le risque du portefeuille vont de pair, dans le sens où un rendement plus élevé nécessite la prise d'un risque plus grand, étant donc en accord avec la théorie classique. Le fait étonnant de cette figure tient au fait que le risque et le rendement du portefeuille géré activement soient négativement reliés à la variance conditionnelle du marché. Par exemple, en considérant les deux quadrants supérieurs (*Rendement moyen* et *Écart-type*), on remarque que le portefeuille géré activement est le plus volatil, et le plus profitable (en termes absolus), lors des 20 % plus petites prévisions de variance conditionnelle du marché. Le levier utilisé dans les périodes d'accalmie du marché est suffisamment important pour compenser l'augmentation du risque du portefeuille lors

des périodes de turbulences. Ceci n'est pas surprenant puisque l'exposition au marché pendant ces périodes de turbulence tend vers 0. Pourtant la stratégie ne semble pas en mesure de tirer tout le potentiel de création de valeur relativement aux variations du prix du risque. Si la stratégie pouvait allouer son exposition et utiliser son budget de risque de façon optimale, le rendement ajusté pour le risque serait environ égal pour tous les régimes de variance, soit le but ultime de la stratégie d'allocation temporelle. Au contraire, le quadrant $E[R]/Var[R]$ de la figure 2.6 présente graphiquement que le rendement ajusté pour le risque du portefeuille augmente de façon monotone à mesure que la variance conditionnelle du marché augmente.

La stratégie dynamique s'expose donc trop lors des régimes de faible variance conditionnelle du marché et ne s'expose pas assez lors des régimes où la variance conditionnelle est élevée. Ce phénomène peut être expliquée par les importants rebonds du marché après une forte correction négative. Il s'agit de moments où le rendement serait suffisant pour s'exposer au risque encouru. Par contre, à cause de l'aspect symétrique de l'allocation de l'exposition, la stratégie distingue difficilement ces périodes de rebond. Une partie de ce problème proviendrait donc de la difficulté à traiter les changements de régime par les signaux de la variance conditionnelle. Une autre partie du problème est la conséquence du rendement offert par le titre sans risque combiné à son risque presque inexistant en comparaison au ratio Sharpe du marché. La grande différence entre les deux récompenses par unité de risque explique partiellement le haut prix du risque pour le portefeuille géré activement lors du régime de variance conditionnelle du marché le plus élevé. Comme le portefeuille est presque totalement investi dans le titre sans risque dans ces périodes, il est impossible méthodologiquement de tirer avantage du haut prix du risque en utilisant le levier, évidemment.

La stratégie dynamique allouerait donc son exposition de façon trop extrême dans les cas de très basse et de très haute variance conditionnelle. Cet aspect pourrait être expliqué par la forme fonctionnelle de l'allocation, soit $(\sigma_t^2)^{-1}$ en omettant la

constante d'ajustement. L'effet d'une variation marginale de la variance conditionnelle en haut régime de variance conditionnelle est quasiment nulle sur l'exposition au facteur de marché et cette exposition se maintient près de zéro. Au contraire, lorsque la variance conditionnelle est basse, une variation marginale a un impact considérable sur l'exposition au facteur de marché.

Pourtant, théoriquement, il n'y a aucune raison de croire qu'une très faible différence de variance conditionnelle serait le signal d'un changement important du comportement de la prime de risque. Au contraire, empiriquement, la stratégie fait varier violemment l'exposition au facteur de risque de marché pour de petites différences dans la variance conditionnelle du marché, lorsque cette dernière est suffisamment petite. C'est pourquoi le levier est, à certains moments, utilisé abondamment.

2.2.6 Importance du levier financier

Deux points discutés dans les sections précédentes refont surface quant à l'importance de l'accès au levier financier, soient le faible pouvoir prédictif de la variance conditionnelle sur les rendements du marché et la dynamique d'épargne et de consommation du risque. Pour ce qui est du premier point, mensuellement, la stratégie surpondère correctement son exposition quand le marché est suffisamment à la hausse pour combler le coût du levier, s'il y a lieu. De la même façon, elle sous-pondère correctement son exposition quand le rendement excédentaire est négatif. Sur la totalité de l'échantillon, la stratégie surpondère ou sous-pondère son exposition au bon moment environ une fois sur deux (541 mois sur l'échantillon de 1097 mois observés). La stratégie proposée ne semble pas permettre d'indiquer aux investisseurs si le rendement mensuel à venir sera positif ou négatif. Le mécanisme de création de valeur est plus complexe. Chaque unité de risque épargnée en période de forte volatilité doit être suffisante pour permettre d'être réinvestie temporellement dans des périodes de calme où le rendement du facteur de marché est suffisamment positif pour combler les erreurs qui découlent de l'estimation de son rendement espéré. Si cela se fait plus

souvent qu'autrement, en moyenne, le rendement de la stratégie dynamique sera supérieur à celui de la stratégie passive. Il est alors difficile de trouver un seul test statistique pour expliquer la valeur ajoutée totale de la stratégie d'allocation temporelle de l'exposition au facteur de marché.

La figure 2.7 exprime graphiquement, dans un premier temps, la relation entre le rendement excédentaire du marché à t et l'inverse de sa variance conditionnelle à t . Dans un deuxième temps, la figure illustre la relation entre le prix du risque à t et l'inverse de la variance conditionnelle à t . Il n'est donc pas question, dans cette figure, de relations entre la prévision de la variance conditionnelle et la prime de risque ou le prix du risque. La figure 2.7 expose une relation très faible entre le rendement excédentaire et l'inverse de la variance conditionnelle et une relation plus grande entre le prix du risque et l'inverse de la variance conditionnelle.

Figure 2.7 ici

Le R^2 de 0.027 de la première partie de la figure 2.7 confirme l'absence de relation linéaire significative entre la première relation exposée. Par contre, le R^2 entre le prix du risque et l'inverse de la variance conditionnelle est de 0.363, signalant une relation linéaire plus forte. Il faut ici rappeler la différence entre le rendement excédentaire et le prix du risque. Le prix du risque est le rendement excédentaire divisé par la variance conditionnelle. Il faut aussi rappeler qu'en ignorant la constante d'ajustement (c), l'allocation au facteur de marché est $(\sigma_t^2)^{-1}$. Donc, le prix du risque peut être vu comme étant le rendement excédentaire mis à levier où celui-ci est supérieur à 1 lorsque la variance conditionnelle est petite et entre 0 et 1 lorsque la variance conditionnelle est grande. La différence dans les deux relations présentées dans la figure 2.7 est donc l'utilisation du levier financier pour tenir compte de l'exposition dynamique au facteur de marché en fonction de la variance conditionnelle. Cependant, pour qu'un investisseur puisse espérer une telle relation, il devrait prévoir parfaitement la variance conditionnelle de prochaine période puisque la figure 2.7

illustre la relation entre le prix du risque et la variance conditionnelle et non l'espérance de celle-ci.

En plus de la relation linéaire présentée, la figure 2.7 semble démontrer qu'il existe une relation positive entre la variance conditionnelle et la probabilité d'avoir une prime négative lorsque la variance conditionnelle diminue drastiquement. Le levier prendrait ici tout son sens. L'accès à celui-ci dans les quantités voulues et au prix du taux sans risque permettrait de tirer avantage de cette relation. Si toutes les hypothèses énoncées précédemment pouvaient s'avérer vraies pour un investisseur, il est peu important d'avoir une faible prime de marché positive et que sa relation linéaire avec l'inverse de la variance conditionnelle soit près de zéro.

De façon absurde, si la probabilité d'avoir une prime négative tend vers zéro lorsque la variance conditionnelle tend vers zéro, alors l'investisseur pourrait prendre un levier qui tend vers l'infini pour bénéficier d'une prime qui tendrait elle aussi vers l'infini avec l'effet de levier, peu importe la grandeur de cette prime sans levier. Cet exemple absurde montre toutefois que la stratégie dynamique ne requiert pas une relation linéaire entre l'inverse de la variance conditionnelle et la prime de marché pour créer de la valeur. Ainsi, les travaux de MM démontrent que de restreindre l'utilisation du levier ne fait pas disparaître la valeur ajoutée, bien que cette dernière diminue lorsque les restrictions deviennent plus contraignantes. L'ajout de contraintes sur le niveau de levier admissible réduit la possibilité de tirer une partie de l'avantage possible en temps de faible variance conditionnelle. D'un autre côté, de telles contraintes réduisent du même coup les graves erreurs d'estimation du rendement. Une fois ces deux effets combinés, la valeur ajoutée diminue, sans toutefois tomber à zéro.

2.2.7 Probabilités du signe du rendement excédentaire

Deux observations empiriques sur l'échantillon original de juillet 1926 à décembre 2017 permettent de constater la relation qui existe entre la probabilité d'avoir une prime négative et la variance conditionnelle. D'abord, la probabilité d'obtenir une

prime négative peut être réduite par la diminution de la variance conditionnelle si la moyenne des rendements est supérieure à zéro, même s'il y a indépendance entre la variance conditionnelle et ladite prime. En effet, une diminution de la variance conditionnelle augmentera la partie supérieure à zéro de la distribution des rendements. Christoffersen et Diebold (2006) offre une explication théorique à ce phénomène. La deuxième observation est la relation qui semble exister entre la prime de marché et l'inverse de la variance conditionnelle.

Bien que la figure 2.7 présente une relation linéaire près de zéro, il n'en demeure pas moins que des particularités surviennent lorsque la variance conditionnelle est à des niveaux élevés. La figure 2.8 présente graphiquement les distributions de la prime de marché en fonction de l'inverse de la variance conditionnelle. Il s'agit de la présentation de distributions conditionnelles. Pour chaque niveau de l'inverse de la variance conditionnelle, une distribution de la prime de marché est graphiquement exposée. En d'autres mots, le graphique répond à la question : Qu'elle est la distribution de la prime de marché lorsque l'inverse de la variance conditionnelle est à un certain niveau?

Figure 2.8 ici

La figure 2.8 démontre que, lorsque la variance conditionnelle devient grande, la moyenne conditionnelle de la prime de marché est sous la moyenne non-conditionnelle de la prime de marché. Par exemple, lorsque la variance conditionnelle est élevée – quand $1/RV$ se maintient entre zéro et 0.4 – la prime de risque conditionnelle est de -2.17 %. En comparaison, la prime de risque non-conditionnelle sur l'échantillon entier est de 0.66 %. De plus, l'étendue des distributions conditionnelles est négativement reliée à l'inverse de la variance conditionnelle – positivement reliée à la variance conditionnelle. Cette observation tient au fait que les sommets des distributions conditionnelles sont beaucoup plus élevés lorsque l'inverse de la variance conditionnelle augmente. Les sommets sont si hauts parce que toutes les

observations quant à la prime de marché pour ce niveau d'inverse de la variance conditionnelle sont rapprochées en termes de valeur.

En combinant les deux observations empiriques, la probabilité d'obtenir une prime négative est effectivement positivement reliée à la variance conditionnelle, sans toutefois s'avérer linéaire. La moyenne conditionnelle de la prime de risque diminue lorsque l'inverse de la variance conditionnelle devient petit. Cette observation rappelle également la composante du signalement de changement de régime. Une variance conditionnelle très élevée peut annoncer que le marché risque de vivre de grands mouvements prochainement, d'où la vaste étendue de la distribution conditionnelle de la prime de marché lorsque l'inverse de la variance conditionnelle s'approche de zéro.

Les observations sur le comportement empirique de la stratégie dynamique proposée semblent tendre vers un phénomène important bien connu du milieu statistique. Le mécanisme d'allocation temporelle crée une valeur ajoutée qui varie selon le sous-échantillon utilisé. Il ne s'agit pas d'un processus qui crée une valeur systématiquement. La stratégie étant basée sur l'accumulation de plusieurs composantes nécessaires, il n'est pas surprenant qu'il existe, sur l'échantillon observé, différentes périodes où la valeur créée fluctue fortement. Il ne suffit que de revoir la figure 2.3 pour constater la différence du comportement de la valeur ajoutée lors des périodes 1961-1967 et 1974-1987.

2.3 Questionnements relatifs à l'échantillon utilisé

La stratégie dynamique proposée par MM s'avère plus rentable qu'une stratégie passive lorsque l'on considère l'ensemble de la période 1926-2017. Par contre, elle performe moins bien que la stratégie passive sur plusieurs sous périodes, lesquelles peuvent s'étendre sur plusieurs années, voire des décennies. Les résultats présentés sur la valeur ajoutée significative tendent donc à démontrer qu'il existe effectivement une covariance négative, sur l'échantillon, entre le prix du risque et la

variance conditionnelle. D'accord, cet échantillon de plus de 90 ans rassemble les composantes nécessaires à la création de valeur. Qu'en est-il pour les années à venir, ou même les années précédant le début du dernier siècle? Est-ce par le processus générateur des rendements même qu'un échantillon de tant d'années sera garant d'une valeur ajoutée significativement positive? Ces questionnements sont reliés aux travaux de Lundblad (2006), Zhou et Zhu (2010) et Huang *et al.* (2018) sur la pertinence de l'échantillon utilisé pour tirer des conclusions valides quant à la prime de risque, notamment. Ces auteurs soutiennent que, bien que l'échantillon typique que représente les données publiques de 1926 jusqu'au 21^e siècle soit important en taille, un millier de mois peut être un échantillon qui n'est pas assez grand pour tenter de mesurer un paramètre ou une relation de faible amplitude à partir de données qui sont caractérisées par une forte volatilité. Alors, une légère prime de risque positive serait conforme aux bases même de la théorie financière, alors qu'une prime négative, bien que près de zéro, soulèverait un sérieux questionnement. Pourtant, cette différence de résultat, semblerait-il, pourrait s'expliquer seulement par la différence des échantillons utilisés.

La question de l'échantillon choisi est d'importance dans le présent cadre méthodologique puisque la grande partie des résultats s'appuie sur une covariance négative entre la prime de marché et la prévision de la variance conditionnelle, soit une condition qui n'est pas toujours respectée lorsque la covariance est mesurée sur un sous-échantillon de l'échantillon de 1926 à 2017. De plus, la covariance entre la prime de marché et la prévision de la variance conditionnelle, du moins sur l'échantillon entier, n'est pas si éloignée du zéro sur une base non-conditionnelle. Par exemple, la corrélation entre les deux variables, qui est plus aisée d'interpréter qu'une covariance, sur les 1097 mois d'observation, est de -0.017 (la covariance non-conditionnelle est de -0.195). Pourtant, lorsque conditionnée sur la variance passée, le comportement de la covariance soulève un questionnement quant à l'échantillon puisqu'elle varie fortement en fonction de la variance conditionnelle. La prévision de la variance conditionnelle, pour sa part, varie en fonction des rendements et du momentum, comme la création d'importants *drawdowns*. La figure 2.9 présente dans un premier temps le

comportement de la covariance entre le prix du risque et la prévision de la variance conditionnelle selon les différents régimes de variance du marché. Dans un deuxième temps, la figure présente la covariance entre la prime de marché et la prévision de la variance conditionnelle. Encore une fois, cette figure divise les prévisions de la variance conditionnelle en quintiles, tout comme à la figure 2.2 et 2.6. Une fois les quintiles établis, les covariances conditionnelles peuvent être calculées.

Figure 2.9 ici

La covariance conditionnelle entre le prix du risque et la variance conditionnelle du marché s'éloigne de zéro seulement lorsque la prévision de la variance conditionnelle du marché est dans les 20 % plus grandes. La covariance entre la prime de marché et la prévision de la variance conditionnelle du marché a un comportement similaire. Il est alors normal de se demander si la somme de ces caractéristiques se répèterait d'un échantillon à l'autre.

Dans le même ordre d'idées, est-ce que ces caractéristiques se retrouveraient combinées dans un échantillon plus petit en termes de périodes d'observation, soit ici le nombre de mois? Existe-il une durée minimale pendant laquelle la stratégie dynamique doit être appliquée à l'échantillon pour voir apparaître une valeur ajoutée significativement positive? Cette réflexion prend tout son sens lors de la recherche sur l'implémentation de cette stratégie dans un cadre pratique pour les investisseurs. Est-ce qu'un investisseur désirant mettre en application ce type de stratégie dynamique peut espérer créer une valeur ajoutée significative à chaque 90 ans? Peut-il espérer ajouter de la valeur ajustée pour le risque à son portefeuille sur une plus courte période? Puisqu'il est ici question de mécanisme qui ne fonctionne pas systématiquement, l'analyse de l'horizon d'investissement peut quantifier l'impact du temps sur les résultats de la stratégie dynamique proposée par MM.

2.3.1 Performance sur des sous-échantillons

Cette section présente les résultats de la performance de la stratégie dynamique en comparaison avec celle du marché sur plusieurs sous-échantillons de la période allant de 1926 à 2017. Limiter l'analyse à l'observation du rendement absolu de la stratégie dynamique sur les différents sous-échantillons ne permettrait pas de juger de la valeur qu'elle crée. Par exemple, simplement à des fins illustratives, la stratégie dynamique pourrait bien avoir un rendement annuel très négatif, -30 %, et toujours créé une valeur ajoutée positive si le marché a un rendement inférieur sur le même sous-échantillon, -35 %. Pour tenir compte de l'aspect relatif, une analyse à partir de la régression suivante est faite :

$$facteur\sigma_t = \alpha + \beta facteur_t + \varepsilon_t.$$

La régression est la même que celle utilisée à la section 2.2.1 pour la réplication des résultats obtenus dans l'article de MM (2017). Donc, l'interprétation demeure inchangée. Ici, le terme $facteur\sigma_t$ représente les rendements générés par la stratégie dynamique appliquée au facteur de marché alors que le terme $facteur_t$ représente les rendements qu'aurait réalisés un investisseur qui aurait placé son argent de façon passive dans le marché. La valeur ajoutée créée par la stratégie dynamique est alors mesurée par le α . Si ce dernier est positif (négatif), c'est que la stratégie dynamique permet d'atteindre un plus grand (petit) rendement par unité de risque. La figure 2.10 présente, pour des horizons de placement allant de 1 à 50 ans, le α maximum et minimum atteint, en plus de son niveau moyen sur ces horizons de placement. Il est à noter que les différents sous-échantillon présentés ne sont pas indépendants puisqu'une fenêtre mobile est utilisée. Un sous-échantillon d'horizon de h mois commence donc à chaque mois. Par exemple, le premier sous-échantillon débute au premier mois de l'échantillon entier, puis le deuxième sous-échantillon commence au deuxième mois de l'échantillon entier et ainsi de suite.

Figure 2.10 ici

Il ne suffit que d'un coup d'œil pour apercevoir que plus l'horizon de placement augmente, plus l'étendue des alphas diminue. Par exemple, lorsque la stratégie dynamique n'est appliquée que sur 1 an, celle-ci crée une valeur ajoutée, sur une base annuelle, entre -55 % et 47 %. Au contraire, lorsqu'elle est appliquée sur 50 ans, tous les alphas générés sont contenus dans un intervalle de 5.5 % (de 0.79 % à 6.30 %). De plus, la figure démontre que la moyenne des alphas est négative pour tout horizon inférieur à 4 ans. La moyenne croît à mesure que l'horizon de placement augmente. Cette observation est plus difficilement visible sur la figure en raison de la petite variation de la moyenne des alphas comparativement à la grande échelle utilisée pour illustrer les maximums et minimums atteints.

Somme toute, la figure 2.10 aide à illustrer le fait que la valeur ajoutée créée par la stratégie dynamique varie selon le sous-échantillon utilisé, surtout lorsque l'horizon de placement est court. Ce ne sont donc pas tous les sous-échantillons qui semblent contenir les caractéristiques nécessaires à la création d'une valeur ajoutée positive.

3. Méthodologie des simulations

Jusqu'ici, tous les résultats énoncés sont basés sur l'échantillon original des données publiques fournies par le site web de Kenneth French. Les composantes importantes identifiées jusqu'ici pour la création de valeur positive dans le cadre de la stratégie dynamique proposée par MM comprennent la tendance haussière du marché, la volatilité de la variance conditionnelle, la présence d'importants *drawdowns*, la relation négative entre la prime de marché et la variance conditionnelle, lorsque celle-ci est élevée, et la relation négative entre le prix du risque et la variance conditionnelle. Est-ce que l'interaction de ces différentes composantes est spécifique à l'échantillon original ou est-ce typique du processus générateur des rendements boursiers? La section suivante tente de répondre à cette question, empiriquement, par l'utilisation de simulations de rendements journaliers à l'aide de différentes méthodes statistiques permettant la comparaison et la compréhension des caractéristiques modélisées.

La question pratique de l'application de la stratégie pour les investisseurs est également traitée par l'analyse de la performance de la stratégie en fonction de l'horizon de placement de l'investisseur. La question d'intégration au cadre pratique naît de la constatation que l'échantillon original contient plus de 90 années complètes. Dans le cas où la valeur ajoutée serait en effet positive sur une période de près d'un siècle, il sera ensuite possible de déterminer, en moyenne, le nombre d'observations nécessaires à la création d'une valeur ajoutée positive, en se rappelant que plusieurs composantes ont un comportement qui tend à aider cette création de valeur, en moyenne. Cette question est pertinente dans la mesure où un investisseur devrait avoir une idée générale de la période de déploiement de son capital dans cette stratégie.

Par la force de sommation de multiples caractéristiques distinctes, en plus du concept important que certaines caractéristiques prennent un temps à se développer, il y a lieu de poser l'hypothèse que la valeur ajoutée devrait être reliée positivement à l'horizon de placement défini. Plus l'horizon sera long, plus la probabilité de retrouver lesdites caractéristiques importantes identifiées sera grande. De plus, du fait qu'il existe, sur l'échantillon original, des périodes où la stratégie dynamique ne fonctionne pas comme désirée, il est logique de supposer que sur un plus court horizon de placement, il y a plus de chances que la performance de la stratégie dynamique soit inférieure à celle d'une stratégie passive. Cette section tentera alors de déterminer l'horizon minimum nécessaire pour limiter la probabilité que la stratégie engendre des pertes significatives, relativement au marché. À la limite, si la performance n'est pas significativement différente du marché, et ce, pour la même prise de risque, l'investisseur ne se retrouve pas perdant d'avoir tenté l'application de la stratégie active. En revanche, si les risques de perdre de la valeur relative sont non-nuls, alors il est important pour l'investisseur de faire une évaluation de ses objectifs d'investissement et de sa tolérance au risque et aux pertes possibles.

La pertinence du procédé de simulation devient apparente pour la question des tests d'horizon de placement puisque, bien que 90 ans puissent sembler beaucoup, il n'y existe, par exemple, que neuf périodes indépendantes de dix ans d'investissement. Toutes les méthodes de simulation utilisées dans le cadre de ce travail n'ont d'autres buts que la simulation de rendements. Une fois les rendements simulés, la stratégie dynamique proposée par MM est suivie à la lettre, telle que présentée à la section 2. Ainsi, les résultats obtenus n'auront aucune autre source de biais que la méthode de simulation choisie. Par exemple, les simulations journalières pourront encore servir au calcul de la variance réalisée mensuelle comme mesure de risque conditionnel. Dans le cas de simulations directement mensuelles, il faudrait modéliser la variance conditionnelle autrement, ce qui pourrait induire un autre biais dans la comparaison des résultats. Les huit méthodes de simulation sont maintenant présentées et expliquées. Ces méthodes ont été choisies pour démontrer certaines particularités empiriques du

processus générateur de rendements ou encore sont utilisées en guise de contrôle pour l'une de ces particularités sur la création de valeur ajoutée de la stratégie dynamique. Les huit méthodes se servent de l'échantillon original pour déterminer les paramètres des diverses modélisations ou encore comme base de rendements pour les méthodes de *resampling*.

3.1 Modèle théorique

La première méthode de simulation est basée sur une modélisation théorique restrictive du comportement des actifs boursiers, soit que les rendements boursiers suivent une marche aléatoire (*random-walk*). Selon cette hypothèse, la variance du marché est constante dans le temps puisque les rendements sont générés de façon indépendante et aléatoire. Les rendements boursiers sont alors la somme temporelle de bruit blanc, soit des sauts non-prévisible, où s'ajoute une tendance déterministe. Le processus se définit ainsi comme :

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (3.1)$$

où dS_t représente le rendement continu du facteur de marché, soit $\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ où P_t représente la valeur du marché à t et P_{t-1} sa valeur à $t-1$. Pour sa part, dW_t représente un mouvement brownien. Puisque les simulations sont faites sur une fréquence journalière, le processus discrétisé devient :

$$mkt_t = \mu\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}, \varepsilon \sim N(0,1) . \quad (3.2)$$

Dans l'équation 3.2, mkt_t est le rendement discret du facteur de marché à t , μ est sa tendance non-conditionnelle et σ est l'ampleur de sa partie non-prévisible. Les deux paramètres nécessaires à la création de trajectoires sous cette hypothèse, soient la tendance et la volatilité du marché, ou ici des erreurs, sont estimés à partir des rendements journaliers de l'échantillon original comme étant, respectivement, la

moyenne arithmétique des rendements (μ) et leur écart-type (σ) sur l'ensemble de la période de juillet 1926 à décembre 2017.

Cette modélisation des rendements journaliers soulève une problématique importante pour l'application subséquente de la stratégie d'allocation temporelle de l'exposition au facteur de marché. Comme le modèle théorique prétend que la variance est constante sur la période, il ne devrait exister aucune variation significative de la variance réalisée mensuelle. Ce modèle n'est alors pas pertinent autrement que pour la démonstration des résultats en l'absence de toutes les caractéristiques identifiées jusqu'ici. Il s'agit donc d'un contrôle minimal pour analyser les résultats des techniques de simulation subséquentes.

3.2 Modèles de type GARCH(p,q)

Les méthodes suivantes sont toutes basées sur la modélisation de type GARCH(p,q) qui fait l'objet d'une littérature immense depuis les travaux de Bollerslev (1986). Comme le nom l'indique, ce principe de modélisation permet l'inclusion de l'hétéroscédasticité dans le processus des présentes simulations de rendements. Il s'agit donc de la première inclusion des caractéristiques soulevées et elle est cruciale car, sans elle, la stratégie n'aurait aucun sens. Toutes ces simulations de type de GARCH(p,q) contiennent, dans la modélisation du rendement, un terme pour considérer le niveau du risque, il s'agit donc de modèles de type *in-mean*. Ce terme permet de modéliser la relation théorique entre la variance conditionnelle, soit une mesure de risque d'un actif, et son rendement. Lors de l'évaluation des modèles, si le coefficient de ce terme est significativement positif, c'est qu'il existe, dans le marché, une relation où une augmentation du risque devrait se traduire par une augmentation du rendement pour la même période d'observation. Les modèles utilisés sont le GARCH-M(1,1), le TGARCH-M(1,1), le EGARCH-M(1,1) et un second TGARCH-M(1,1) où il n'existe aucune tendance haussière du rendement moyen pour contrôler cette caractéristique. Ce dernier modèle sera dénoté ND-TGARCH-M(1,1) (*No Drift*). Dans tous les cas, le -M signifie l'ajout du coefficient *in-mean* tel que discuté.

Le GARCH-M(1,1) trouve sa pertinence dans l'ajout d'un contrôle pour l'hétéroscédasticité seulement. Les modèles TGARCH-M(1,1) et EGARCH-M(1,1) permettent en plus de contrôler pour un effet de levier possible dans les rendements du marché étudié. L'effet de levier est la relation entre le rendement passé d'un actif et son niveau de risque, mesuré ici par la variance de l'actif. Schwert (1989) propose une explication reliant le levier financier agrégé dans le marché et la volatilité de ce dernier. La relation devrait être négative pour démontrer qu'une baisse de rendement hausse le levier agrégé du marché, puisque la baisse du rendement est conséquente à la baisse de la valeur marchande des fonds propres, alors que la valeur de la dette est considérée constante. En somme, la diminution de la valeur des fonds propres crée ainsi une hausse du levier financier ce qui, conséquemment à la théorie financière classique, devrait augmenter le risque d'un actif. Dans ces modèles, la variance des rendements du marché dépend donc des rendements de ce dernier. Plus précisément, la variance du marché augmente lorsque son rendement est faible, et vice-versa. Ces modèles pourront aider la compréhension de l'effet de cette caractéristique sur la performance de la stratégie d'investissement proposée ici.

Bien que l'effet de levier puisse s'apparenter à l'étude de l'hypothèse de MM sur la relation entre le prix du risque et la variance conditionnelle, les deux concepts évaluent différents aspects du marché. Dans le contexte de la stratégie dynamique proposée par MM, l'effet de levier exploite la différence dans la vitesse d'ajustement entre les deux premiers moments de la distribution conditionnelle des rendements du marché pour permettre une allocation dynamique de l'exposition au marché. Pour sa part, l'effet de levier teste la présence de causalité temporelle entre les rendements d'un actif et le risque de celui-ci une fois ce rendement subit. Cette dernière caractéristique est d'importance mais n'est pas explicitement mentionnée dans les travaux de MM.

Deux raisons expliquent pourquoi l'effet de levier est une caractéristique importante à modéliser pour améliorer la validité des simulations. D'abord, l'échantillon empirique de 1926-2017 contient un effet de levier non-nul. En effet, en

utilisant la variance réalisée comme mesure de la variance conditionnelle, la corrélation entre le rendement excédentaire à t et la variance conditionnelle à $t+1$, au niveau mensuel, est d'environ -0.24.¹⁰ Cette observation semble en accord avec la littérature. Glosten, Jagannathan et Runkle (1993) obtiennent aussi une relation négative entre les mouvements non-anticipés du rendement excédentaire du facteur de marché et la volatilité conditionnelle du rendement excédentaire à la période suivante. Cependant, dans leur article, la variance conditionnelle est modélisée, au lieu d'être une variable observée. La relation négative entre les deux variables apparaît lorsque la variance conditionnelle est modélisée par des modèles de type GARCH-M où il est possible que les mouvements imprévus de la prime de marché aient un impact différent sur la variance conditionnelle selon s'ils sont positifs ou négatifs. Par exemple, la relation négative apparaît lorsqu'est utilisé le modèle EGARCH-M, qui permet cette asymétrie.

La seconde raison est que la présence d'un effet de levier crée un mécanisme de transmission entre les rendements réalisés et l'allocation au facteur de marché dans la stratégie dynamique proposée par MM. Par exemple, si $r_t < 0$, σ_{t+1}^2 augmentera par l'effet de levier. Dans le cadre de la stratégie dynamique, cette augmentation aura par la suite un impact négatif sur l'allocation faite au marché dans la période suivante, puisque $w_{mkt,t+2} = \frac{c}{\sigma_{t+1}^2}$. Les techniques de simulations qui ignorent l'effet de levier ignorent du même coup ce mécanisme de transmission du rendement vers l'allocation de l'exposition dynamique. Il s'agit alors d'un processus qui tend à utiliser le momentum du marché dans les périodes de variance conditionnelle moyenne. C'est-à-dire que la stratégie propose de vendre le marché une fois un rendement négatif réalisé et d'augmenter l'exposition en cas contraire.

Les modèles de type GARCH(p,q) utilisés sont présentés formellement ici. Pour tous les modèles, le processus du rendement est défini tel que :

¹⁰ La corrélation est significativement différente de zéro à un seuil de signification de 1 %.

$$r_{mkt,t} = \mu + \lambda \sigma_t^2 + v_t, \quad v_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0,1). \quad (3.3)$$

Les variances conditionnelles pour chaque modèle sont définies telles que :

$$\text{GARCH-M}(1,1) : \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 r_{mkt,t-1}^2 + \delta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (3.4)$$

$$\text{TGARCH-M}(1,1) : \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 r_{mkt,t-1}^2 + (\lambda_1 I_{t-1} + \delta_1) \sigma_{t-1}^2, \quad (3.5)$$

$$I_{t-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } r_{mkt,t-1} < 0 \\ 0 & \text{si } r_{mkt,t-1} \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{EGARCH-M}(1,1) : \ln \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \lambda_1 \left| \varepsilon_{t-1} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right| + \delta_1 \sigma_{t-1}^2. \quad (3.6)$$

Les modèles de type GARCH(p,q) partagent tous un mécanisme similaire. Par exemple, l'équation de la formation de chaque rendement est pareille, bien que les paramètres estimés puissent changer pour chaque méthode. Pour chaque modèle de type GARCH(p,q) proposé, les paramètres de l'équation propre au rendement, l'équation 3.3, sont estimés en même temps que les paramètres relatifs à la variance conditionnelle, donc ceux de l'équation 3.4, 3.5 ou 3.6. Pour les modèles de type GARCH(p,q), la variance conditionnelle est une variable modélisée. Cette modélisation est aussi utilisée comme une variable dépendante pour la détermination du rendement. Alors, l'équation de rendement ne peut être estimée comme une simple régression par les moindres carrés ordinaires (MCO). L'estimation par MCO ne peut fonctionner correctement lorsque les variables dépendantes sont des paramètres estimés. L'estimation donnée serait instable. Elle tenterait d'estimer des paramètres sur d'autres paramètres eux-mêmes approximatifs, n'ayant pas seulement une valeur mais une distribution de valeurs possibles. Donc, l'estimation de tous les paramètres du système d'équation du modèle de type GARCH(p,q) doit être faite en une seule étape par la méthode du maximum de vraisemblance. Celle-ci tente alors de maximiser une

fonction de log-vraisemblance. La maximisation utilise un principe récursif où plusieurs combinaisons de paramètres sont testées jusqu'à l'atteinte d'un optimum de ladite fonction de log-vraisemblance. En d'autres mots, en admettant que le modèle proposé est bien spécifié, le processus récursif tente de trouver les paramètres qui ont le plus de chances d'avoir produit les observations de l'échantillon utilisé pour le paramétrage (Richard, 2018).

Tel que discuté brièvement ci-haut, tous les modèles de type GARCH(p,q) ont des caractéristiques similaires. D'abord, la génération des rendements est la même, la seule différence étant que la variance conditionnelle est générée différemment selon les modèles. Ensuite, ces modèles sont tous estimés de la même façon. Si les résultats n'étaient basés que sur ces modèles, il serait difficile de départager la partie des résultats qui serait causée par les modèles employés et la partie qui proviendrait réellement de conséquences financières. Pour contrôler les effets propres à ce type de modélisation, trois méthodes de simulation basées sur la technique statistique de *resampling*, connu aussi sous le nom de *bootstrap*, sont aussi utilisées pour les divers tests relatifs à l'horizon de placement et à la spécificité de l'échantillon original. Ces méthodes ont pour point commun d'utiliser les rendements de l'échantillon empirique réalisé de façon plus directe. Pour les modèles de type GARCH(p,q), les rendements empirique réalisés ne sont qu'utilisés pour le paramétrage des modèles.

Dans les méthodes de *bootstrap*, les simulations accordent davantage d'importance aux rendements empiriques réalisés. Par exemple, deux des trois méthodes basées sur le principe de *bootstrap* présentées dans la section suivante, soit le *simple resampling* et le *stationary bootstrap*, sont principalement basées sur la réorganisation temporelle des rendements de façon aléatoire. Par le fait même, ces modèles ont une modélisation très limitée. En n'ayant peu de paramètres à estimer, voire aucun, le risque d'erreur dû aux estimations se trouve réduit. Il serait par contre faux d'attribuer ce fait à toutes les méthodes de type *bootstrap*. Par exemple, la

méthode du *wild bootstrap* nécessite l'étape de paramétrage puisqu'un principe de régression linéaire lui est sous-jacent.

Bref, le choix d'un modèle demeure une décision qui peut contenir son lot d'erreurs. D'abord, le modèle choisi peut ne pas être optimal, créant un biais dans les résultats. Ensuite, l'estimation des paramètres sont aussi source d'erreurs. Cette dernière est plus aisément mesurable. Cependant, la première source est difficilement quantifiable. En utilisant plusieurs types de modèles, il est plus facile d'observer les conséquences du choix d'un type de modèle par rapport à un autre.

3.3 Modèles de type *resampling*

3.3.1 *Simple resampling*

La première technique utilisée, le *simple resampling*, est la plus simple et s'apparente aux simulations sur base théorique que représente le processus de marche aléatoire. Cette technique est de loin la plus simple, surtout parce qu'elle n'incorpore aucun mécanisme d'hétéroscédasticité ni d'effet de levier. Le processus de création de simulations est le suivant : À partir des rendements journaliers de l'échantillon original, pour une simulation de n jours, par exemple, il suffit de piger aléatoirement n rendements réalisés sur l'échantillon original. Il s'agit ici d'une pige où chaque rendement est aléatoirement tiré selon une probabilité uniforme sur tout l'échantillon original. La pige se fait avec remise, donc le même rendement peut être pigé plusieurs fois. Aucun mécanisme ne force l'existence d'hétéroscédasticité. La plus importante hypothèse sous-jacente à ce type de processus de génération de rendements est que ceux-ci sont indépendants, hypothèse partagée avec la marche aléatoire. Tout comme cette dernière technique d'ailleurs, le *simple resampling* est également utilisé à titre de contrôle minimum pour comparer l'effet des autres techniques basées sur le concept de *bootstrap*.

3.3.2 Wild bootstrap

La seconde technique utilisée est communément appelée le *wild bootstrap*. Cette version du processus de *bootstrap* a été originalement développée par Liu (1988), alors que Flachaire (2015) explique sa pertinence pour les données contenant de l'hétéroscédasticité. La particularité de cette technique est que le principe de *resampling* est fait sur les résidus plutôt que directement sur les rendements. Ces résidus ne peuvent provenir que d'un modèle linéaire. Il faut alors déterminer un modèle sous-jacent au processus de rendements réalisés sur l'échantillon original. Huang *et al.* (2018) utilise également le *wild bootstrap* dans un contexte financier, soit pour tester la présence de momentum temporel dans le facteur de marché, entre autres. Comme la série de rendements de l'échantillon contient de l'hétéroscédasticité, l'inclusion dans le modèle linéaire de la variance conditionnelle est importante. Cette technique de simulation modélise le rendement comme un processus ARIMA(1,0,1) où est ajouté un contrôle pour la variance conditionnelle. Ce processus devient alors :

$$r_{mkt,t} = \mu + \alpha_1 r_{mkt,t-1} + \alpha_2 v_{t-1} + \lambda \sigma_t^2 + v_t . \quad (3.7)$$

La variance conditionnelle est modélisée selon un modèle ARIMA(1,0,1) TGARCH-M(1,1). Une fois cette série temporelle définie, la variance conditionnelle modélisée est utilisée dans la régression linéaire du rendement comme telle. Celle-ci est alors appliquée aux rendements journaliers de l'échantillon original et les erreurs, v_t sont enregistrées. En comparaison aux modèles de type GARCH(p,q), les résidus obtenus de l'équation (3.7) ne sont pas normalement distribués. Ces résidus contiennent encore de l'hétéroscédasticité, caractéristique souhaitable. Le processus de simulation se définit alors comme :

$$r_{mkt,t}^* = \hat{\mu} + \hat{\lambda} \sigma_t^2 + \hat{v}_t \varepsilon_t \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_t \sim \text{distribution de Rademacher}.$$

$$\varepsilon_t = \begin{cases} 1 & \text{avec probabilité de } 1/2 \\ -1 & \text{avec probabilité de } 1/2 \end{cases}$$

Dans l'équation 3.8, le symbole * est utilisé pour indiquer qu'il s'agit d'un rendement simulé. Bien que le rendement au temps t ne puisse donc prendre que deux seules valeurs, à cause de la composante aléatoire de la distribution de Rademacher, il est possible de générer jusqu'à 2^n trajectoires (Cameron, 2017).

Une seconde composante aléatoire est ajoutée pour exploiter tout le bénéfice de cette méthode à titre de simulations. Celle-ci a trait à la temporalité de la période considérée. Il serait théoriquement possible de toujours prendre les n premières données de l'échantillon original nécessaires à la simulation des trajectoires en fonction de l'horizon choisi. Pourtant, il est préférable de simuler sur toute l'étendue possible, et ce, pour chaque longueur de simulation désirée.

En définissant N comme étant la longueur de l'échantillon original et $[a, b]$ comme étant la période sur laquelle le *wild bootstrap* est appliqué, une simulation de longueur n^* est choisie aléatoirement de la façon suivante :

$$a = \lfloor |u \cdot (N - n^* - 1)| \rfloor + 1, u \sim U(0,1) \text{ }^{11} \quad (3.9)$$

$$b = a + n^* \quad (3.10)$$

Le -1 et le terme final (+1) dans l'équation 3.9 sont nécessaires pour s'assurer que le minimum est de 1, dans le cas où $u = 0$, et que le maximum est de $N - n^*$, dans le cas où $u = 1$. Grâce à cette deuxième composante aléatoire, le processus de simulation optimise l'étendue possible de l'échantillon original sans délaisser les propriétés du *wild bootstrap*.

¹¹ La notation $\lfloor |\cdot| \rfloor$ est utilisée tout au long de ce mémoire pour décrire l'action d'arrondir à l'entier le plus près.

La caractéristique de l'hétéroscédasticité est conservée par ce processus de simulation grâce au comportement de v_t dans l'équation (3.8). Il s'agit des erreurs d'un processus linéaire sur des rendements hétéroscédastiques. Par conséquent, à cause de la linéarité du modèle, l'hétéroscédasticité demeure dans les résidus. De plus, les résidus sont toujours considérés selon leur ordre d'apparition dans le temps, c'est-à-dire que les échantillons créés sont toujours sur une série de résidus aux temps $\{t, t + 1, t + 2, t + 3 \dots\}$, où t représente la période initiale de l'échantillon. Il est vrai que les résidus sont modifiés par leur multiplication avec une variable distribuée selon une loi de Rademacher. Pourtant, cette variable ne fait que changer aléatoirement le signe des résidus. Changer la direction du mouvement n'en change pas l'ampleur. Ainsi, l'hétéroscédasticité demeure présente. Cependant, la composante aléatoire de la variable distribuée selon une loi de Rademacher pose problème quant au mécanisme d'effet de levier. Le terme $\hat{v}_t \epsilon_t$, soit le résidu utilisé, est strictement aléatoire quant au signe. Le mécanisme d'effet de levier des données originales n'est alors pas conservé et la covariance entre la variance conditionnelle à t et le rendement à $t+1$ est forcée à tendre vers zéro. Somme toute, cette technique de simulation permet de contrôler l'effet de l'hétéroscédasticité en même temps que d'apporter une base comparative aux méthodes qui incorporent l'effet de levier.

3.3.3 *Stationary bootstrap*

La huitième et dernière technique de simulation est le *stationary bootstrap*, aussi appelée *moving block bootstrap*, telle que présentée par Politis et Romano (1994). Celle-ci partage deux caractéristiques intéressantes des deux dernières méthodes précédentes. Pour conserver l'impact temporel des diverses caractéristiques propres aux rendements, puisque ceux-ci ne sont pas strictement indépendants dans l'échantillon original, cette méthode pige des périodes de rendements successifs. Dans le *simple resampling*, les simulations étaient faites en pigeant un rendement à la fois. Ici, les rendements sont pigés en bloc. Il ne reste qu'à piger le nombre de blocs nécessaires à la construction de la simulation voulue. Cependant, en conservant une longueur de bloc constante dans le processus de pige aléatoire, la série perd sa propriété

de stationnarité, ce qui est ici non-souhaitable. Politis et Romano (1994) proposent alors de déterminer la longueur de chaque bloc selon une distribution géométrique. Ce faisant, les auteurs démontrent que la série simulée conserve sa stationnarité, d'où le nom de *stationary bootstrap*. Par ce fait même, la simulation conserve son hétéroscédasticité et son effet de levier puisque la temporalité des rendements est conservée. Il serait possible que ces caractéristiques soient brisées entre la fin d'un bloc et le début d'un autre. Lesdites caractéristiques sont pourtant vraies en moyenne et non de façon systématique, ce qui en réduit l'impact. De plus, cette question est considérée dans le paramètre de la distribution géométrique.

La longueur d'un certain bloc est déterminée de sorte que la probabilité que la longueur soit égale à m est de $(1 - p)^{m-1}p$, $\forall m$. La longueur d'un bloc est alors déterminée aléatoirement en fonction du paramètre $p \in [0, 1]$. Par la forme fonctionnelle de la distribution, p et la longueur des blocs sont négativement reliés : plus p sera élevé, plus la longueur des blocs sera petite. Il est à noter que plus la longueur des blocs est courte, plus il existe de brisures temporelles dans la série de rendements simulés et plus il y a de chances de perdre les caractéristiques du processus original. Un trop petit p crée, pour sa part, le fait de choisir de longs blocs, diluant les avantages de création des simulations différentes puisque les mêmes rendements se répéteront. Il est alors important de choisir le plus grand p possible tout en conservant les propriétés importantes de l'échantillon original. Politis et Romano (1994) détermine alors p comme étant $p = 1/b$ où b est le nombre d'autocorrélations significatives dans le processus original. En définissant l comme étant la somme du nombre de rendements contenus dans tous les blocs précédents servant à définir une simulation, la méthodologie appliquée pour déterminer la longueur d'un bloc est :

$$m = \min(n^* - l, G^{-1}(u)) \quad (3.11)$$

où $G^{-1}(\cdot)$ représente l'inverse de la distribution géométrique et $u \sim U(0,1)$. Une fois cette longueur déterminée, il suffit de piger les m rendements du bloc, soit

$\{r_i, r_{i+1}, r_{i+2}, r_{i+3}, \dots, r_{i+m}\}$. Le i est déterminé de façon similaire au a de l'intervalle servant à la simulation dans le *wild bootstrap*. C'est-à-dire :

$$i = \lfloor |u \cdot (N - m - 1)| \rfloor + 1, \quad u \sim U(0,1). \quad (3.12)$$

4. Résultats

Cette section présente les données de l'échantillon original utilisé pour paramétrer les méthodes de simulations le nécessitant, présente ces paramètres et expose les principaux résultats. D'abord, une discussion sur les caractéristiques empiriques observées par les méthodes de simulation comparativement aux données de l'échantillon original est présentée. Les résultats sur la valeur ajoutée de l'allocation temporelle de l'exposition au facteur de marché en fonction de l'horizon de placement suivent. Les variables explicatives trouvées à cette valeur ajoutée sont par la suite identifiées, présentées et discutées.

4.1 Données de l'échantillon original réalisé

Les données constituant l'échantillon original qui servira au calibrage et au paramétrage des différentes méthodes de simulation sont les rendements journaliers du facteur de marché (Mkt), pondérés selon la capitalisation boursière, disponibles gratuitement sur le site web de Kenneth French. Ces rendements sont basés sur les données du CRSP (*Center for Research in Security Prices*) et reflètent le marché boursier américain. Les rendements du premier juillet 1926 jusqu'au 29 mars 2018 sont utilisés comme échantillon pour calibrer les simulations ou pour fournir une base d'échantillon aux techniques de simulation de *resampling*. À partir de ces 24 201 rendements, il est possible de construire 1100 observations mensuelles complètes et l'échantillon couvre donc plus de 91 ans de performance passive du marché boursier américain.

4.2 Comportement empirique des méthodes de simulation

Le comportement empirique des simulations est important pour juger de la pertinence et de la validité de la technique de simulation. La première étape est de faire

une analyse préliminaire sur l'échantillon original. Cette analyse sert de base comparative pour juger de la qualité des différentes techniques de simulation. Elle permet également de s'assurer que chaque technique de simulation respecte les attentes quant à ses caractéristiques respectives. La seconde étape est de regarder les caractéristiques des rendements journaliers simulés puis de les comparer à ceux de l'échantillon original. Les caractéristiques regardées ici sont les quatre premiers moments de la distribution des rendements simulés. Bien qu'il soit possible que certaines méthodes de simulation réussissent à créer des rendements aux caractéristiques très semblables aux rendements historiques, des déviations sont acceptables puisque le but n'est pas de reproduire exactement l'échantillon original mais plutôt de conserver ses caractéristiques propres.

4.2.1 Paramétrage des modèles

Alors que la section 3 présente les différents modèles permettant de faire les simulations nécessaires, cette section présente le paramétrage desdits modèles. Avant d'être en mesure de simuler des rendements, plusieurs méthodes nécessitent la calibration et le paramétrage des modèles. Le tableau 4.1 présente les paramètres des modèles de type GARCH(p,q) utilisés pour simuler les rendements. Tous les paramètres qui figurent dans la première colonne font référence à ceux utilisés aux équations 3.3 à 3.6. Comme certains modèles ne nécessitent pas l'estimation de tous ces paramètres, certains éléments du tableau sont donc laissés vides. Par exemple, par construction, le modèle ND-TGARCH-M ne nécessite pas l'estimation de la tendance déterministe relative à l'équation du rendement, soit μ . De plus, ce modèle est le seul qui n'est pas strictement estimé par maximum de vraisemblance. Ces paramètres sont seulement ceux du modèle TGARCH-M où la tendance du rendement a été mise à zéro. Le tableau présente alors, pour chaque paramètre estimé, la valeur de l'estimation et, entre parenthèses, la valeur p nécessaire pour tester si la valeur estimée du paramètre est statistiquement significativement différente de zéro.

Tableau 4.1 ici

De tous les paramètres estimés pour les modèles de type GARCH-M, seul le paramètre de la constante dans le log de la variance conditionnelle du modèle EGARCH-M (γ_0) n'est pas significativement de zéro. Donc, pour les modèles ici présents, la tendance déterministe journalière du rendement (μ) est significativement différente de zéro et varie entre 0.034 % et 0.050 % selon les diverses méthodes. De plus, pour chaque modèle, le coefficient lié à la relation instantanée entre la variance conditionnelle à t et le rendement à t (λ) est toujours positif et significatif.

Au niveau de la modélisation de l'hétéroscédasticité, pour chaque modèle, le coefficient de la première autocorrélation de la variance conditionnelle (δ_1) est significatif et est près de 1, soit entre 0.888 et 0.981. Donc, la variance conditionnelle de la période $t+1$ a de très bonnes chances d'être dans les environs de la variance conditionnelle de la période t . Il s'agit du concept d'hétéroscédasticité. De plus, les coefficients relatifs au carré du rendement de la période précédente (γ_1) sont aussi significatifs. Un tel coefficient positif indique que si l'ampleur du rendement passé a été grande, alors la variance conditionnelle pour la période suivante s'ajuste à la hausse. Il s'agit donc aussi de résultats qui tendent à démontrer la présence d'hétéroscédasticité. Bien qu'à l'habitude, une contrainte existe quant au signe positif des deux derniers paramètres discutés (δ_1 et γ_1), il est acceptable que la valeur du coefficient γ_1 du modèle EGARCH-M soit négative puisque ce modèle traite le logarithme de la variance conditionnelle et non de la variance conditionnelle comme telle (se référer à l'équation 3.6).

Pour les modèles qui ont la possibilité de considérer un impact différent sur la variance conditionnelle selon le signe du rendement précédent, soient les modèles TGARCH-M et EGARCH-M, les coefficients d'asymétrie (λ_1) de chacun sont significatifs et sont, respectivement, de 0.113 et 0.161. Ce coefficient exprime donc que dans ces deux modèles, un rendement passé négatif a comme incidence d'augmenter la variance conditionnelle de la prochaine période. Ce coefficient est donc responsable de la modélisation de l'effet de levier.

Pour leur part, les méthodes basées sur le principe de *resampling* ne nécessitent pas de modélisation supplémentaire autre que pour le paramètre p du *stationary bootstrap*. Comme discuté à la section 3.3.3, pour tenir compte de l'hétéroscédasticité et de l'effet de levier, p est calibré comme étant égale à $1/b$, où b est le nombre d'autocorrélations significativement différentes de zéro. Dans le cas présent, pour que l'hétéroscédasticité qui caractérise les données originales demeure présente dans les simulations, il est préférable de considérer les autocorrélations dans le carré des rendements journaliers. Le paramètre b utilisé ici est de 132 et p est conséquemment égal à $1/132$, soit environ 0.00758.¹²

4.2.2 Génération de rendements journaliers

Cette section a pour but d'analyser le comportement de chacune des méthodes de simulation afin de juger de leur validité dans le contexte de ce mémoire. Il est possible de juger de cette validité en comparant les rendements journaliers simulés à ceux de l'échantillon de départ (échantillon de Kenneth French couvrant la période allant de juillet 1916 à mars 2018). Pour qu'une méthode soit jugée valide sur cette base comparative, elle doit simuler des rendements qui se distribuent selon une loi qui ressemble à la loi empirique de l'échantillon de départ. Ici, les distributions sont comparées en mesurant les quatre premiers moments propres à chaque distribution. Il ne suffit pas que les quatre premiers moments de la méthode soient semblables à ceux de la distribution empirique pour que cette méthode assure une bonne validité des simulations mais c'est un pas dans la bonne direction.

Le tableau 4.2 présente, pour chaque technique de simulation utilisée, la moyenne des quatre premiers moments obtenus des 1500 simulations¹³ de 24 201

¹² À titre indicatif, le lecteur peut noter que les 132 autocorrélations dans le carré des rendements journaliers représentent les autocorrélations de 6 mois d'activité boursière.

¹³ Le nombre de simulations choisi, 1500, est déterminé par un compromis entre la convergence des paramètres (demandant un grand nombre de simulations) et la puissance de calcul disponible (limitant le nombre de simulations possibles). 1500 simulations répond alors aux deux critères énoncés ci-haut.

rendements journaliers effectuées.¹⁴ De plus, par le théorème limite centrale, la distribution des statistiques des moments devraient tendre vers la loi normale. Le tableau 4.2 présente donc également la cote Z servant à tester si la valeur estimée de chaque moment est statistiquement significativement différente de celle obtenue à partir de l'échantillon original. La cote Z calculée est donc :

$$CoteZ_{sim,i} = \frac{\left(\frac{1}{1500} \sum_{sim=1}^{1500} moment_{sim,i}\right) - moment_{réel,i}}{\sigma_{moment_{sim,i}}} \quad (4.1)$$

$$i \in \{1,2,3,4\}.$$

Selon l'équation 4.1, une cote de 0 pour un moment spécifique obtenu à l'aide d'une méthode de simulation i donnée signifierait que cette méthode produit en moyenne un moment qui n'est pas statistiquement différent de celui obtenu à partir de l'échantillon original. Une cote de 1.645 signifierait qu'environ 95 % des simulations effectuées avec cette méthode produisent un moment plus élevé que l'échantillon original et qu'environ 5 % des simulations produisent un moment de valeur moins élevée.

Tableau 4.2 ici

Quelques résultats valent la peine d'être soulevés relativement à ce tableau. D'abord, la marche aléatoire produit les deux premiers moments presque identiquement à l'échantillon original ce qui est normal puisque ceux-ci sont pris tels quels de ce dernier. Par contre, les troisième et quatrième moments sont loin d'être représentatifs de ceux obtenus à partir de l'échantillon original. En fait, ces moments sont exactement ceux de la loi normale, résultat attendu par la nature du processus où la seule composante aléatoire est $\varepsilon \sim N(0,1)$. Les simulations relatives aux modèles de

¹⁴ Notez que le nombre de rendements journaliers correspond à celui de l'échantillon de départ.

type GARCH(p,q) produisent des premier et troisième moments trop élevés alors que le quatrième est beaucoup trop faible en comparaison à l'échantillon original. La variance générée par le modèle EGARCH-M semble systématiquement trop élevée. Il est à noter que le premier moment du ND-TGARCH-M est trop faible par construction même.¹⁵ Ce résultat était donc attendu. Les méthodes de *resampling* offrent les moments les plus fidèles à l'échantillon original. Ce sont les seules méthodes, parmi celles que nous avons choisies, qui permettent de reproduire adéquatement la distribution leptokurtique des rendements boursiers. Les attentes concernant le comportement de chacune des méthodes de simulation discutées dans la section 3 semblent dans l'ensemble respectées.

4.2.3 Statistiques mensuelles des simulations

Similairement à la section précédente, cette section compare le comportement des simulations à celui de l'échantillon original mais cette fois-ci, à la fréquence mensuelle. L'importance de cette section est que les données mensuelles sont en fait calculées à partir des simulations journalières. En aucun cas est-ce qu'un modèle simule directement des données mensuelles dans ce mémoire. Donc, il est important de s'assurer que les simulations journalières, une fois agrégées mensuellement, permettent de recréer des caractéristiques mensuelles semblables à celles retrouvées dans l'échantillon original.

Le tableau 4.3 présente donc les caractéristiques mensuelles de toutes les méthodes de simulation utilisées. Ce tableau contient aussi les statistiques de chaque simulation relativement aux quatre premiers moments de leur distribution ainsi que la cote Z telle que définie à l'équation 4.1. De plus, pour s'assurer que les simulations mensuelles de chaque modèle se comportent de façon semblable aux données

¹⁵ Comme il est expliqué à la section 3.2, la méthode de simulation ND-TGARCH-M (*No Drift* TGARCH-M) est construite pour que la moyenne des rendements simulés soit nulle, pour ainsi simuler un marché où il n'y aurait aucune tendance haussière. Pour ce faire, comme exposé à la section 4.2.1, le coefficient de la tendance déterministe du processus générateur des simulations (μ) est contraint à zéro.

mensuelles de l'échantillon original, le tableau présente également la première autocorrélation de la variance conditionnelle et l'effet de levier mensuel, qui est ici calculé comme étant la corrélation entre le rendement au temps t et la variance conditionnelle à $t+1$. Cette première autocorrélation est d'importance dans l'application de la stratégie d'allocation dynamique puisque la variance conditionnelle à t est utilisée comme mesure de l'espérance de la variance conditionnelle à $t+1$, soit $E_t[\sigma_{mkt,t+1}^2] = \sigma_{mkt,t}^2$. Donc, une méthode de simulation qui crée une autocorrélation trop élevée se donne un avantage relatif en réduisant les erreurs de prévision de la variance. Pour sa part, la mesure de l'effet de levier est importante puisqu'il s'agit d'une caractéristique présente dans l'échantillon original et qui influence l'allocation au facteur de risque de la stratégie dynamique, tel que présenté et discuté à la section 3.2. Une cote Z pour chacune de ces deux statistiques est également présentée pour chaque méthode de simulation.

Tableau 4.3 ici

L'analyse du tableau 4.3 est faite en deux temps. D'abord, les quatre premiers moments des distributions des rendements mensuels sont présentés et comparés aux moments présentés au tableau 4.2. Ensuite, l'analyse des résultats de la première autocorrélation de la variance conditionnelle et de l'effet de levier pour chaque méthode de simulation est présentée.

Au niveau des quatre premiers moments de la distribution des rendements simulés, évidemment, les moyennes et les variances des rendements sont différentes de celles présentées dans le tableau 4.2 puisque la fréquence d'observation n'est pas la même. Donc, il est normal que ces moments, au niveau mensuel, soient systématiquement plus élevés. En fait, ils sont tous environ 22 fois plus grands que ceux présentés au tableau 4.2, ce qui est normal puisque 22 rendements journaliers sont simulés pour chaque mois. Somme toute, pour chaque méthode de simulation, les cotes Z calculées à la fréquence mensuelle sont semblables à celles obtenues en utilisant les

données journalières. En d'autres mots, si une méthode ne parvient pas à recréer un moment semblable à celui du marché à la fréquence journalière, la méthode ne parvient toujours pas à recréer ce moment similairement à celui du marché à la fréquence mensuelle, et vice-versa. Par exemple, les cotes Z relatives aux moments de la méthode GARCH-M sont pratiquement les mêmes, soient de 5.52 (vs. 5.55), -0.63 (vs. 0.33), 0.72 (vs. 1.04) et -1.56 (vs. -1.24).¹⁶ Une analyse similaire peut être faite pour les autres méthodes de simulation.

Quelques exceptions existent quand même quant aux similarités existant entre les cotes Z des tableaux 4.2 et 4.3. Les simulations mensuelles de la marche aléatoire ont une variance significativement différente de celle du marché comme le montre la cote Z de -2.81. Au niveau journalier, celle-ci était de 0.01 (voir tableau 4.2). Mensuellement, le modèle EGARCH-M permet de simuler des rendements ayant un kurtosis plus près de celui du marché qu'au niveau des simulations journalières, comme le démontre la cote Z de -2.13, présentée au tableau 4.3, au lieu de -29.38 (voir tableau 4.2). Toutefois, la même conclusion demeure ; cette méthode ne parvient pas à simuler des rendements ayant un kurtosis semblable à celui des rendements de l'échantillon original. Les deux dernières exceptions ont trait au kurtosis des rendements simulés par la méthode du *simple resampling* et du *wild bootstrap*. Dans le cas du *simple resampling*, les rendements mensuels ont un kurtosis significativement différent des rendements de l'échantillon original (cote Z de -17.90). Au contraire, mensuellement, le *wild bootstrap* permet de générer des rendements avec un kurtosis semblable à celui de l'échantillon original (cote Z de 0.31).

Les prochaines sous-sections discutent en détails des résultats relatifs à la première autocorrélation de la variance conditionnelle et de l'effet de levier tels que présentés au tableau 4.3. D'abord, les résultats des méthodes de simulation qui sont censées ne modéliser ni l'hétéroscédasticité ni l'effet de levier sont présentés. Suivent

¹⁶ Les nombres entre parenthèses font référence aux résultats présentés dans la colonne 3 (GARCH-M) du tableau 4.2.

les résultats des méthodes qui ne devraient modéliser que l'hétéroscédasticité. Enfin, dans la dernière sous-section, les résultats des méthodes qui devraient modéliser à la fois l'hétéroscédasticité et l'effet de levier sont analysés.

Méthodes basées sur l'indépendance des rendements

Les particularités des méthodes de marche aléatoire et du *simple resampling* méritent d'être discutées. Celles-ci réagissent exactement comme il était possible de le croire *a priori*. Aucun mécanisme n'existe pour recréer les caractéristiques d'hétéroscédasticité ni d'effet de levier, ces caractéristiques étant en contradiction avec le principe d'indépendance des rendements. Elles agissent donc comme de bonnes méthodes de contrôle pour comparer l'effet sur la performance de la stratégie active de la présence de ces caractéristiques dans les autres types de simulation. Avant même d'avoir testée la performance de la stratégie dynamique de MM sur les simulations effectuées avec ces méthodes, aucune raison ne nous pousserait à croire que la stratégie dynamique devrait fonctionner avec ces rendements simulés.

Méthodes ne captant que l'hétéroscédasticité

Les méthodes GARCH-M et *wild bootstrap* permettent, en principe, de modéliser l'hétéroscédasticité des rendements mensuels et de conserver une première autocorrélation de la variance conditionnelle assez près de l'échantillon original. Pourtant, le *wild bootstrap* semble systématiquement produire cette caractéristique de façon plus faible que la série originale, d'où le -6.72 de sa cote Z. Quant à lui, le modèle GARCH-M semble produire des simulations avec un premier moment systématiquement trop élevé. Les deux méthodes ont aussi un effet de levier aux alentours de zéro, ce qui est normal et souhaitable dans les circonstances. L'absence d'effet de levier dans les simulations obtenues avec ces méthodes permet de contrôler les conséquences de l'ajout de cette caractéristique dans les méthodes TGARCH-M et *stationary bootstrap*. Aussi, la méthode de type GARCH-M proposent une première autocorrélation de la variance conditionnelle élevée. Celle-ci demeure tout de même acceptable d'un point de vue de la cote Z, c'est-à-dire qu'il serait possible que cette

caractéristique de l'échantillon original soit bel et bien reproduite à partir d'un tel processus générateur.

Méthodes captant l'hétéroscédasticité et l'effet de levier

Tel que prévu, les modèles TGARCH-M, ND-TGARCH-M et le *stationary bootstrap* incluent un mécanisme de reproduction de l'effet de levier présent dans l'échantillon original au niveau mensuel. Ceux-ci sont également en mesure de bien recréer la première autocorrélation de la variance conditionnelle et, sur la base de ces résultats, semblent capable de reproduire les caractéristiques importantes présentes dans l'échantillon original. En revanche, les simulations à partir du modèle EGARCH-M ne semblent pas en mesure de bien modéliser l'effet de levier au niveau mensuel. Ces simulations ne fonctionnent donc pas comme il était possible de le croire et ne pourront donc pas servir de contrôle à l'ajout de la modélisation de l'effet de levier. La méthode basée sur le ND-TGARCH-M agit d'une façon attendue en ayant un rendement mensuel moyen très faible et en conservant les autres caractéristiques désirées similairement à la méthode basée sur le TGARCH-M, soient les quatre premiers moments de la distribution des rendements simulés semblables aux moments de la distribution originale, l'hétéroscédasticité et la présence de l'effet de levier.

En général, les méthodes TGARCH-M et *stationary bootstrap* produisent toutes les caractéristiques identifiées dans l'échantillon original de belle façon, partageant forces et faiblesses sur certaines caractéristiques particulières. Par exemple, le *stationary bootstrap* semble mieux reproduire les deux premiers moments de la distribution des rendements mensuels alors que le TGARCH-M semble mieux reproduire le troisième moment. Somme toute, ces deux méthodes semblent produire des rendements satisfaisants. L'analyse de l'impact de l'horizon de placement avec ces deux méthodes a donc de bonnes chances d'être réaliste et valide.

4.3 Résultats sur l'horizon de placement

Les résultats suivants testent l'hypothèse comme quoi une hausse de l'horizon de placement devrait hausser la probabilité de créer une valeur significativement positive lorsque la stratégie d'allocation dynamique de l'exposition au facteur de risque de marché est appliquée. Bien que la section précédente conclue que, parmi celles choisies, seules les méthodes TGARCH-M et *stationary bootstrap* permettent de simuler des rendements valides, cette section présente les résultats de toutes les méthodes en fonction de l'horizon de placement. La raison est simple, ces méthodes, bien qu'elles produisent des résultats invalides, facilitent la compréhension et la visualisation de l'impact de la présence de l'hétéroscédasticité, de l'effet de levier ou de la tendance haussière du marché sur la capacité de la stratégie dynamique à créer de la valeur. Elles permettent donc de répondre à des questions du type ; quelle est l'impact de la présence de l'effet de levier sur la création de valeur de la stratégie dynamique en fonction de l'horizon de placement? Pour chaque méthode de simulation donc, les horizons de 1 à 50 ans sont testés par bonds de 6 mois; c'est-à-dire que $h = \{12, 18, 24, 30, \dots 600\}$, où h correspond à l'horizon de placement exprimé en mois. Puisque la méthodologie utilise la variance conditionnelle passée, un mois de simulations supplémentaire est toujours ajouté à l'horizon. Donc, pour un horizon de 12 mois, 13 mois de rendements simulés sont utilisés pour que la stratégie soit bel et bien appliquée sur 12 mois complets. De plus, pour chaque méthode et pour chaque horizon, 1500 simulations sont effectuées.

La figure 4.1 présente les principaux résultats de cette analyse de l'horizon de placement pour chaque méthode de simulation. Elle présente le pourcentage des 1500 simulations qui présentent un alpha significativement différent de zéro dans la régression suivante :

$$r_{\sigma} = \alpha + \beta r_{sim} + \varepsilon_t .$$

Cette régression a comme objectif de quantifier la valeur ajoutée créée par la stratégie dynamique par rapport au facteur de marché simulé. Dans l'équation précédente, r_σ représente un vecteur des rendements excédentaires du portefeuille géré activement à partir des rendements simulés. Pour sa part, r_{sim} représente un vecteur des rendements excédentaires simulés du marché passif. Donc, le terme α de la régression mesure la valeur ajoutée créée par l'application de la stratégie dynamique en comparaison au facteur de marché simulé. Si α est significativement supérieur à zéro, c'est que la stratégie dynamique permet d'atteindre un meilleur rendement par unité de risque que celui du marché (c.-à-d., à celui d'une stratégie passive investie à 100 % dans le marché). À l'inverse, si ce terme est significativement négatif, c'est que la performance ajustée pour le risque de la stratégie dynamique est pire que celle du marché. Le terme ε_t représente le terme d'erreur inhérent à la régression.

La première partie de la figure présente la proportion des α qui sont significativement supérieurs à zéro alors que la deuxième partie présente une analyse similaire, mais cette fois-ci, en analysant la proportion des simulations qui engendrent un α significativement inférieur à zéro. Une limite importante de la figure 4.1 doit être mentionnée. L'ampleur de la valeur ajoutée est ici ignorée ici (cette question sera cependant discutée plus loin). La figure ne fait pas la distinction entre un alpha légèrement et largement significativement supérieur, ou inférieur, à zéro. La figure 4.1 présente les résultats de toutes les méthodes de simulation utilisées dans ce mémoire. Elle permet de donner une vue générale des différences dans les résultats relatifs aux différentes méthodes. Pour voir plus précisément les résultats de chaque méthode de simulation, les figures 4.2, 4.3 et 4.4 divisent les résultats de la figure 4.1 en plusieurs graphiques. La figure 4.2 reprend les résultats des méthodes basées sur l'indépendance des rendements, la figure 4.3 reprend ceux des méthodes ne captant que l'hétéroscédasticité et la figure 4.4 reprend ceux des méthodes captant l'hétéroscédasticité et l'effet de levier.

Figure 4.1 ici

Pour bien comprendre l'interprétation des résultats présentés dans les figures 4.1 à 4.4, prenons un exemple simple. Si pour une méthode donnée et un horizon donné, la première partie de la figure démontre 10 %, c'est qu'il y a 150 des 1500 simulations qui présentent un alpha significativement plus grand que zéro. Pour un investisseur qui voudrait déployer du capital pour cet horizon de placement en utilisant la stratégie dynamique, cela signifie qu'il aurait une chance sur dix d'avoir effectivement réalisé un meilleur rendement par unité de risque que ce que lui aurait fourni l'investissement passif dans le marché. Les pourcentages présentés supposent l'hypothèse implicite que le marché réel agit tel que la méthode de simulation le propose. Une discussion plus approfondie des résultats relatifs à chaque méthode de simulation est présentée dans les sections qui suivent.

Méthodes basées sur l'indépendance des rendements

Figure 4.2 ici

C'est sans grande surprise que les deux méthodes qui supposent l'indépendance des rendements soient de celles qui produisent le moins d'alphas significativement positifs, peu importe l'horizon considéré. Il est peut-être plus surprenant de voir que ces pourcentages, bien que relativement constants entre les différents horizons, s'élèvent en moyenne autour de 3 % mais peuvent monter jusqu'à près de 7 %. Malgré l'absence de tout mécanisme caractéristique de l'échantillon original, la stratégie réussit quand même parfois à créer de la valeur ajoutée. Ces résultats servent alors de référence précieuse. Même en acceptant l'idée d'indépendance des rendements et donc que la variance conditionnelle à t utilisée pour l'allocation de l'exposition à $t+1$ ne donne aucun pouvoir prédictif sur la mesure du prix du risque, un certain pourcentage des simulations crée de la valeur. En d'autres mots, par la force du hasard, en moyenne, environ 3 % des simulations créent un alpha significativement supérieur à zéro.

Un pourcentage similaire est d'ailleurs retrouvé pour les alphas significativement négatifs. Donc, ces simulations proposent que, par hasard, il est possible de s'attendre à ce que la grande majorité des simulations aient un alpha de zéro et donc que la performance de la stratégie active soit similaire à la performance passive, une fois ajustée pour le risque. Le contrôle est pertinent dans la mesure où il est maintenant possible de comparer les résultats des autres méthodes sachant qu'environ 3 % de ceux-ci peuvent être attribués au hasard.

Méthodes ne captant que l'hétéroscédasticité

Figure 4.3 ici

Pour ce qui est des méthodes qui captent l'hétéroscédasticité sans toutefois réussir à recréer un mécanisme d'effet de levier, soient GARCH-M et *wild bootstrap*, les pourcentages des simulations avec un alpha significativement positif sont les plus élevés pour la majorité des horizons analysés. En fait, le pourcentage de simulations créant de la valeur positive pour le GARCH-M tend vraisemblablement vers le 100 %. Pour sa part, à partir de la méthode du *wild bootstrap*, le pourcentage de simulations où la stratégie dynamique bat le marché tend vers les 80 % à mesure que l'horizon de placement augmente. Pourtant, bien que les résultats de ces deux méthodes de simulation tendent vers un pourcentage élevé, la progression vers ce dernier est faite progressivement au fil du temps. Par exemple, le fait demeure qu'il faut plus de 12 ans aux simulations du GARCH-M pour franchir le seuil du 50 % et plus de 25 ans relativement au *wild bootstrap*.

Clairement, l'hétéroscédasticité est un facteur crucial dans les résultats de la stratégie dynamique. Évidemment, cette conclusion est sans surprise et se retrouve également dans les travaux de MM. En effet, MM proposent de faire varier dynamiquement l'exposition au facteur de marché selon les différentes variances conditionnelles. Donc, sans les variations dans les variances conditionnelles – sans

hétéroscédasticité – la proposition de MM n’aurait aucun sens puisque l’allocation au facteur de marché ne varierait pas. Il ne faut pas perdre de vue que ces méthodes de simulation ne tiennent pas compte de toutes les caractéristiques empiriques contenues dans l’échantillon original réalisé. Le fort pourcentage de résultats positifs générés par ces méthodes de simulation pourrait donc bien être causés par l’absence, par exemple, de l’effet de levier dans les simulations. Somme toute, ces deux méthodes permettront de regarder l’impact de l’ajout de mécanisme de l’effet de levier des autres méthodes sur une base cumulative des caractéristiques empiriques de l’échantillon original.

En conséquence de la création de valeur ajoutée plus que souvent positive sur la plupart des horizons, ces méthodes de simulation offrent parmi les plus bas pourcentages d’alphas significativement négatifs. Une progression temporelle monotone existe également. À toutes fins pratiques, ces pourcentages avoisinent le zéro à partir d’un horizon de trois ans pour le GARCH-M et de cinq ans pour le *wild bootstrap*. Avant ces horizons, les pourcentages s’apparentent à ceux créés par hasard dans les méthodes où les rendements sous réputés indépendants par construction.

Méthodes captant l’hétéroscédasticité et l’effet de levier

Figure 4.4 ici

Les méthodes TGARCH-M et *stationary bootstrap* représentent les méthodes les plus complètes en ce qui a trait aux caractéristiques prises en considération dans les simulations des rendements. La méthode EGARCH-M, bien qu’elle soit censée capturer l’effet de levier correctement, ne parvient pas à s’avérer une méthode représentative de l’échantillon. Pourtant, bien que la méthode du EGARCH-M ne parvienne pas à bien modéliser l’effet de levier au niveau mensuel, les pourcentages d’alphas significativement différents de zéro sont similaires à ceux générés par la méthode TGARCH-M dans le cadre de ces présents tests.

Le comportement des résultats relatifs aux méthodes TGARCH-M et *stationary bootstrap* est similaire à travers les différents horizons, à la différence près que les pourcentages de simulations ayant un alpha statistiquement positif générés par les simulations basées sur le principe de *stationary bootstrap* sont systématiquement moins avantageux. L'inclusion du mécanisme d'effet de levier diminue systématiquement l'efficacité de la stratégie d'allocation dynamique de l'exposition au facteur de marché. Bien que la hauteur des courbes TGARCH-M et *stationary bootstrap* soient plus faible, les méthodes incluant la modélisation de l'hétéroscédasticité, à l'exception de la méthode ND-TGARCH-M, présentent toutes une courbe croissante qui tend vers des hauteurs spécifiques. Ces hauteurs semblent se concentrer en certains points d'après l'inclusion ou non du mécanisme d'effet de levier.

La figure 4.5 présente les résultats concernant l'impact des rendements au temps t sur les allocations subséquentes de l'exposition au marché. La figure présente les corrélations entre le rendement du marché au temps t et les allocations faites au facteur de marché dans la stratégie dynamique sur les 24 mois suivants, pour les méthodes TGARCH-M, *stationary bootstrap* et *wild bootstrap* à des fins comparatives. L'objectif de cette figure est de présenter graphiquement la relation positive qui unit, dans la stratégie dynamique, les rendements du marché au temps t et les allocations subséquentes au facteur de marché. Le mécanisme de cette relation est décrit à la section 3.2 de ce mémoire.

Figure 4.5 ici

La figure 4.5 confirme qu'il existe une relation entre le rendement du marché au temps t et les allocations de l'exposition subséquentes au marché. Lorsque la méthode de simulation prend en considération l'effet de levier, le rendement du marché au temps t impacte significativement et positivement l'allocation de l'exposition au marché dans les périodes suivantes. Dans les quadrants *TGARCH-M* et *Stationary bootstrap* de la figure 4.5, on remarque que l'impact du rendement se trouve diminué

par le passage du temps et devient approximativement nul après un an. Ces deux quadrants démontrent aussi que la corrélation entre le rendement au temps t et les allocations suivantes atteint son maximum, respectivement, aux allocations des temps $t+1$ et $t+0$. Après avoir atteint le maximum, l'impact du rendement au temps t sur les allocations au facteur de marché suivantes décroît exponentiellement. L'impact du rendement au temps t sur les allocations au facteur de marché suivantes disparaît lorsqu'il n'y a pas de mécanisme d'effet de levier, comme il est possible de voir dans le quadrant *Wild bootstrap* de la figure 4.5.

Somme toute, pour les méthodes considérant au moins l'hétéroscédasticité, le pourcentage de simulations ayant un alpha significativement positif est croissant dans son ensemble en fonction du temps, confirmant alors l'hypothèse posée au début de la section qu'il existe une relation positive entre l'horizon de placement et la création de valeur ajoutée par l'application de la stratégie d'allocation dynamique. Parallèlement, le pourcentage d'alphas négatifs est lié négativement à l'horizon de placement. Cette hypothèse était justifiée par le comportement de certaines caractéristiques qui tendent à être vraies en moyenne, dans son ensemble. Plus l'horizon est grand, plus les chances sont élevées que les caractéristiques nécessaires à la création de valeur naissent dans l'échantillon simulé.

Importance de la tendance haussière

Le dernier contrôle, soit celui de l'impact de la tendance haussière du rendement sur la création de valeur, produit par les simulations issues du modèle ND-TGARCH-M, démontre la véracité de l'hypothèse stipulant l'importance de la tendance haussière du marché dans les résultats présentés par MM. Dans la sous-section 2.2.4, il était question de l'aspect symétrique de l'allocation de l'exposition au facteur de marché selon la variance conditionnelle. Il était démontré que cette symétrie, bien que porteuse d'erreurs, trouvait son sens en étant combinée à une tendance haussière du marché boursier. Les simulations du modèle ND-TGARCH-M se proposent comme une base de comparaison naturelle à celles du modèle TGARCH-M

puisque la seule différence entre les deux méthodes est la présence, dans cette dernière, d'une tendance haussière du marché sensiblement semblable à celle retrouver dans l'échantillon original.¹⁷ Dans les résultats relatifs au modèle ND-TGARCH-M, le comportement du pourcentage d'alphas positifs en fonction de l'horizon de placement est similaire à ceux des méthodes basées sur l'indépendance des rendements. En d'autres mots, le pourcentage n'est pas croissant en fonction de l'horizon et est semblable à celui qui est généré par pur hasard.

L'analyse du comportement du pourcentage d'alphas négatifs est aussi révélatrice de l'importance de la tendance dans les rendements du marché (voir figure 4.4). Les pourcentages des simulations qui génèrent un alpha significativement négatif calculés à partir de cette méthode semblent également indépendants de l'horizon de placement puisqu'ils sont plutôt constants sur tous les horizons. Cependant, dans le cas de cette méthode, ces pourcentages s'avèrent être systématiquement plus élevés que ceux basée sur l'hypothèse d'indépendance des rendements. La tendance haussière semble donc au moins aussi importante dans la création de valeur ajoutée positive par l'application de la stratégie dynamique que l'hétéroscédasticité contenue dans les rendements boursiers. Évidemment, l'importance de l'hétéroscédasticité est facilement visible par la proposition même de MM. L'impact de la tendance haussière, pour sa part, se cache dans l'interaction de plusieurs composantes.

Derniers mots

Le but de ces tests était de déterminer le temps nécessaire à l'application de la stratégie d'allocation active de MM pour qu'elle puisse dégager un alpha statistiquement significativement positif. En effet, les résultats présentés dans MM ne considéraient qu'un seul échantillon d'une seule durée, environ 90 ans. Même dans le meilleur des cas, soit les résultats obtenus des méthodes GARCH-M et *wild bootstrap*, pour qu'un investisseur puisse espérer raisonnablement créer de la valeur ajoutée

¹⁷ Dans le tableau 4.3, il est montré que l'espérance de rendement ($E[R]$) pour l'échantillon original est de 0.94 % versus 1,28 % pour la méthode TGARCH-M.

ajustée pour le risque, il doit déployer son capital dans cette stratégie pendant de nombreuses années. Le nombre d'années augmente encore lorsque les méthodes de simulation offrant les résultats les plus conformes aux caractéristiques de la distribution des rendements de l'échantillon original sont utilisées, soient les modèles TGARCH-M et *stationary bootstrap*. En fait, en reprenant les simulations les plus complètes et les plus réalistes, il faut un horizon de placement supérieur à cinq ans avant que le pourcentage des alphas positifs dépasse celui produit par le hasard et dépasse de façon importante le risque de créer des pertes relatives significatives dans le processus d'investissement.

Après avoir exploré plusieurs pistes de réponses quant à l'explication de la valeur ajoutée de la stratégie en fonction de l'horizon de placement, le tableau 4.4 présente une synthèse des informations relatives à la valeur ajoutée que peut espérer obtenir un investisseur en fonction de l'horizon de placement. Les résultats du tableau 4.4 sont basés sur les simulations produites avec la méthode TGARCH-M.¹⁸ Le tableau présente, pour chaque horizon analysé, allant de 1 an jusqu'à 90 ans, l'alpha moyen obtenu à partir des 1500 simulations, l'écart-type des 1500 alphas obtenus, la valeur p du alpha moyen, le alpha minimum et le alpha maximum. Tous les alphas et les statistiques relatives à ceux-ci sont annualisés.

Tableau 4.4 ici

Encore une fois, dans ce tableau, les alphas représentent la mesure de la valeur ajoutée par la stratégie dynamique. Donc, au niveau de l'interprétation de ceux-ci, un alpha de 5 % signifie que la stratégie permet de générer 5 % de rendement supérieur au marché, pour le même niveau risque. Une fois de plus, les résultats semblent montrer que la valeur ajoutée est positivement reliée à l'horizon de placement. Pourtant, bien que la valeur du alpha moyen obtenu pour chaque horizon de placement analysé ($\bar{\alpha}$)

¹⁸ Les résultats à partir de la méthode du *stationary bootstrap* sont présentés au tableau A3.1 de l'appendice III. Le lecteur intéressé pourra juger de la similarité des résultats entre les deux méthodes.

soit croissante lors des horizons allant de 1 à 25 ans, soit passant de -0.5 % à 4.0 %, la moyenne semble par la suite se maintenir aux alentours de 3.3 % jusqu'à un horizon de placement de 90 ans.

Alors que l'horizon de placement augmente, la dispersion des alphas décroît. La diminution de l'écart-type des alphas simulés (σ_α) et la diminution de l'étendue de ceux-ci (maximum - minimum) permet de corroborer cette affirmation. Par exemple, avec un horizon d'un an, l'écart-type des alphas est aussi haut que 11.9 % et les alphas varient de -96.9 % à 64.1 %. À l'opposé, avec un horizon de placement de 90 ans, l'écart-type des alphas diminue à 1.6 % et tous les alphas sont contenus entre -1.3 % et 8.9 %.

En raison de la stabilité de la moyenne des alphas à partir de 25 ans d'horizon de placement et de la diminution de la dispersion des alphas lorsque l'horizon augmente, les valeurs p relatives aux moyennes sont, en général, positivement reliées à l'horizon de placement, et ce, sur tous les horizons testés.¹⁹ Il est toutefois important de noter qu'il faut 90 ans d'horizon de placement pour que le alpha moyen soit significativement différent de 0, comme le démontre la valeur p de 1.97 à cet horizon de placement. Il s'agit donc d'une autre démonstration de l'importance d'appliquer la stratégie dynamique sur un long horizon de placement pour qu'un investisseur puisse espérer réaliser un gain significatif.

4.4 Variables explicatives de la valeur ajoutée

L'analyse de l'horizon de placement décrit bien le comportement de la proportion des simulations qui ont un alpha positif, négatif ou neutre. En revanche, une limite analytique existe sur la compréhension du fondement de la valeur ajoutée puisque, jusqu'ici, les alphas ne sont classés que de façon ordinale, en trois catégories mutuellement exclusives, soit selon qu'ils sont significativement négatifs, nuls ou

¹⁹ Des exceptions existent aux horizons de placement de 50, 55, 60, 65 et 75 ans.

significativement positifs. La présente section propose d'explorer les variables explicatives de la création de la valeur créée par la stratégie active, sans classement ordinal. Ceci permet de considérer quelles caractéristiques des rendements simulés obtenues dans certaines simulations peuvent influencer cette création de valeur. Ce faisant, cette analyse des résultats considère la différence entre un alpha légèrement positif et un alpha largement positif, bien que les deux soient significativement supérieur à zéro au sens statistique. L'identification empirique des variables par le biais des simulations propose de continuer sur la lancée de MM et de tenter de comprendre le comportement de la stratégie dynamique proposée par ces mêmes auteurs. Par exemple, ceux-ci avaient identifié, par dérivations théoriques, l'importance de la variance de la volatilité dans leurs résultats.

De plus, pour expliquer plus précisément les résultats obtenus dans l'analyse de l'effet de l'horizon de placement sur la capacité de la stratégie à créer de la valeur, le comportement de chaque variable est analysé sur différents horizons de placement. Cette analyse devrait permettre d'identifier le comportement de certaines caractéristiques de la valeur ajoutée par la stratégie en fonction de l'horizon de placement.

4.4.1 Identification des variables

Cette section présente la méthodologie utilisée pour identifier les variables explicatives de la valeur ajoutée par l'application de la stratégie dynamique. Les variables identifiées et leur pouvoir explicatif sont ensuite présentés. L'utilisation de régressions linéaires permet du même coup l'utilisation du R^2 comme mesure pour juger du pouvoir explicatif d'une variable sur la valeur ajoutée créée. Par les propriétés des régressions linéaires, le R^2 de chaque régression indique le pourcentage de variation de la valeur ajoutée créée expliqué par la variable dépendante testée. Pour identifier les variables qui ont un pouvoir d'explication significatif de la valeur ajoutée créée par la stratégie dynamique et pour quantifier ce pouvoir explicatif, la régression suivante est utilisée.

$$\widehat{\alpha}_{sim} = \alpha + \beta statistique_{sim} + \varepsilon .$$

Dans cette régression, $\widehat{\alpha}_{sim}$ est un vecteur des 1500 alphas simulés par une des méthodes de simulation et $statistique_{sim}$ est le vecteur de la statistique observée sur chacune des 1500 simulations effectuées. Par exemple, ce vecteur pourrait être la variance de la variance conditionnelle dans chacune des simulations. Le terme α n'est ici qu'une constante sans interprétation importante dans ce contexte et le terme ε est le terme d'erreur. La régression fonctionne de sorte que si la statistique sous observation réussit à expliquer une bonne partie de la variation de la valeur ajoutée créée par la stratégie dynamique, alors le R^2 de la régression est élevé. De plus, le β renseigne sur le sens de la relation entre la statistique sous observation et la valeur ajoutée créée. Si ce dernier est significativement positif, c'est qu'il est préférable que la statistique observée soit élevée pour que la stratégie dynamique fonctionne bien. Le R^2 et le β permettent alors conjointement de déterminer quelles caractéristiques il est souhaitable de retrouver dans le marché pour que la stratégie dynamique crée une valeur ajoutée significativement positive. Seules les simulations des méthodes TGARCH-M et *stationary bootstrap* valent la peine d'être ainsi analysées puisqu'elles sont les seules qui modélisent correctement l'hétéroscédasticité et l'effet de levier présent dans l'échantillon original.

Huit variables explicatives ont été identifiées comme étant d'importance dans la variation de la valeur ajoutée créée par la stratégie dynamique. Toutes les variables testées ont trait aux caractéristiques des rendements du facteur de marché générés. Elles sont donc indépendantes des rendements de la stratégie dynamique proposée. En d'autres mots, elles sont des variables *a priori* à l'application de la stratégie dynamique. Les variables testées sont :

1. Le *drawdown* minimum obtenu sur la période;
2. La moyenne des rendements;
3. Le kurtosis des rendements;

4. La moyenne du log de la variance conditionnelle;²⁰
5. La variance du log de la variance conditionnelle;
6. Le kurtosis du log de la variance conditionnelle;
7. La corrélation entre le prix du risque et la variance conditionnelle;
8. Le poids moyen alloué dans l'exposition au marché.

La variable du *drawdown* minimum est ici analysée pour tenir compte du comportement particulier de la stratégie lors des périodes de grands *drawdowns*, comme il est décrit à la section 2.2.3. Dans l'échantillon original, ces périodes de *drawdowns*, suivies des périodes de reprises du marché, sont constituées des rendements les plus extrêmes et c'est pourquoi le kurtosis des rendements est ici analysé. La moyenne des rendements est considérée dans les variables explicatives puisque la tendance haussière du marché semble être une variable importante dans la création de la valeur ajoutée par la stratégie dynamique. La tendance haussière du marché et son impact sur la valeur ajoutée sont discutés aux sections 2.2.4 et 4.3.

L'analyse du comportement de la variance conditionnelle est faite sous trois aspects, soit par la mesure des premier, deuxième et quatrième moments de la distribution du logarithme de la variance conditionnelle. Pour être en mesure de comprendre pourquoi le logarithme de la variance conditionnelle est utilisé et pour bien interpréter les résultats du tableau 4.5, il peut être nécessaire de noter que le logarithme de la variance conditionnelle des rendements boursiers suit une distribution approximativement normale (Andersen *et al.*, 2001). Donc, comme les valeurs des quatre premiers moments de la distribution normale sont connus, la comparaison de la distribution empirique obtenue est plus aisée. Le premier moment est utilisé pour mesurer l'impact du niveau moyen de la variance conditionnelle sur la valeur ajoutée. Les deuxième et quatrième moments de la distribution du logarithme de la variance

²⁰ Le logarithme de la variance conditionnelle des rendements boursiers est utilisé puisque qu'il suit une distribution approximativement normale (Andersen *et al.*, 2001), rendant l'interprétation des résultats plus facile. Il en va ainsi pour les variables 5 et 6, respectivement, la variance et le kurtosis du log de la variance conditionnelle.

conditionnelle sont des mesures de dispersion et sont en rapport direct avec l'hypothèse théorique de MM stipulant que la variance de la variance conditionnelle devrait être positivement reliée à la création de valeur de la stratégie dynamique. Cette hypothèse est présentée précédemment à la section 2.2.3 de ce mémoire.

La corrélation entre le prix du risque et la variance conditionnelle fait partie de la présente analyse puisque toute la proposition de MM sur l'allocation dynamique en fonction de l'espérance de la variance conditionnelle repose sur cette corrélation. Le poids moyen alloué dans l'exposition au marché est ici analysé pour tenir compte de la dynamique d'épargne et de consommation d'unités de risque. En effet, si l'exposition moyenne au facteur de marché est élevée, c'est qu'une grande portion du risque peut être évitée en peu de temps, puis peut être redéployée sur d'autres périodes en utilisant le levier financier. Une discussion sur ces sujets, la corrélation entre le prix du risque et la variance conditionnelle et la dynamique d'épargne et de consommation d'unités de risque, se trouve à la section 2.1.3.

Le tableau 4.5 présente le pouvoir explicatif de chacune des huit variables identifiées sur une base individuelle, évalué à l'aide de régressions simples. Le tableau présente également le pouvoir explicatif de chacune une fois contrôlée pour toutes les autres variables. Il s'agit des résultats obtenus avec les simulations générées à partir du modèle TGARCH-M où les simulations portent sur un horizon de placement de 90 ans. Les résultats avec la méthode du *stationary bootstrap* sont similaires²¹, alors que ceux relatifs aux autres méthodes sont non pertinents dans le cas présent. Il est à noter que le modèle linéaire réunissant les huit variables contient des colinéarités élevées pouvant poser des problèmes de stabilité des paramètres. Somme toute, comme l'objectif est de comprendre le comportement de la génération des alphas de la stratégie d'allocation active de l'exposition au facteur de marché, cet aspect est quelque peu moins limitant. De plus, le problème est d'autant moins préoccupant que la présence de multi

²¹ Le lecteur intéressé aux résultats relatifs aux simulations faites à partir de la méthode du *stationary bootstrap* peut se référer au tableau A3.2 de l'appendice III.

colinéarité a pour effet d'augmenter l'erreur type des coefficients. Or, les valeurs p obtenues une fois la multi colinéarité corrigée seraient encore plus faibles.

Tableau 4.5 ici

Chacune des huit variables a un comportement qui peut être compris intuitivement, en lien avec certains des résultats préliminaires présentés à la section 2. Le *drawdown* minimum atteint est lié négativement à la création de la valeur par l'application de la stratégie active, ce qu'on aperçoit par son bêta de -5.35. Ce phénomène s'interprète bien par la combinaison des phénomènes d'épargne et de consommation du budget de risque de même que par la composante de signalement de changement régime. Plus un important *drawdown* est subi dans une simulation, plus il y a de chance que la stratégie dynamique permette de créer de la valeur soit en épargnant plusieurs unités de risque en peu de temps, soit en sous-pondérant l'exposition au marché au bon moment. L'effet de cette variable perd de son importance lorsque contrôlée pour les sept autres variables. Cette affirmation peut être vérifiée en comparant les coefficients bêtas relatifs au *drawdown* minimum dans les régressions univariée (-5.35) et multivariée (-0.74).

Le premier moment de la distribution des rendements a un comportement prévisible lorsqu'il est modélisé individuellement, comme le montre la relation positive entre cette variable et la valeur créée par la stratégie active. Ce résultat rappelle l'importance de la tendance haussière du marché. Contrairement aux attentes, lors du contrôle pour les autres variables, le rendement moyen devient négativement corrélé avec la création de valeur. Peut-être que cet aspect apparaît par la mauvaise modélisation de la tendance haussière par le rendement moyen. Par exemple, quelques rendements extrêmes pourraient influencer la statistique de la moyenne. Cette hypothèse est soulevée par la différence des résultats obtenus ici et ceux de la section 4.3 quant à l'importance de la tendance haussière. Pourtant, dans le tableau 4.5, le pouvoir explicatif de la moyenne des rendements est pratiquement nul. Le kurtosis des

rendements explique une partie importante de la création de valeur en étant lié positivement à cette dernière

La distribution de la variance est également une caractéristique importante de la création de valeur. Les résultats présentés ici confirment les résultats théoriques de MM qui proposent une relation positive entre la variance de la variance conditionnelle et la valeur ajoutée par la gestion active de l'exposition. Le kurtosis de la distribution et sa relation positive avec la valeur créée vont dans le même sens, en mesurant la proportion de variances conditionnelles extrêmes retrouvées dans les simulations.

Plus spécifiquement à l'hypothèse soulevée par MM, la présence d'une corrélation négative entre le prix du risque et la variance conditionnelle est de loin le facteur explicatif le plus important soulevé dans cette analyse, comme l'indique son R^2 de 0.40 et son haut coefficient. Ce phénomène n'est nullement surprenant puisqu'il s'agit d'un des fondements même de la stratégie dynamique proposée par MM. L'allocation moyenne au marché est également liée intrinsèquement aux propositions de ces auteurs. Il s'agit du concept de l'utilisation du levier au bon moment pour tirer un avantage des déséquilibres temporels du prix du risque. Plus le poids moyen est élevé, plus la stratégie réussit à épargner des unités de risque importantes aux bons moments puis à les redéployer lors de moments où le prix du risque est élevé. C'est pourquoi cette variable est positivement reliée à la création de valeur ajoutée comme l'indique son bêta de 11.94 dans la régression univariée et de 6.30 dans la régression multiple.

4.4.2 Comportement des variables en fonction de l'horizon

L'identification et l'expression du comportement des variables explicatives de la valeur ajoutée en fonction de l'horizon de placement permettent de raffiner la compréhension des résultats présentés à la section 4.3 relativement à l'importance de l'horizon de placement. En conséquence de la relation entre la valeur ajoutée par la stratégie dynamique et les huit variables explicatives sélectionnées, il est possible de

croire qu'il existe une certaine combinaison de ces variables pour que la valeur ajoutée soit significativement positive. Il est alors pertinent de regarder le comportement de ces variables en fonction de l'horizon, ou encore en fonction du nombre d'observations produites par les simulations.

La figure 4.6 présente le comportement de chacune des huit variables identifiées en fonction d'un horizon allant de 1 à 50 ans, pour les 1500 simulations basées sur le modèle TGARCH-M.²² La figure présente, pour chacune des huit variables et pour chaque horizon, le maximum atteint par la statistique observée dans les 1500 simulations, le minimum atteint, la médiane et aussi l'écart-type de la statistique relativement à un horizon de placement précis.

Figure 4.6 ici

Une brève synthèse des informations contenues dans le tableau 4.5 démontre que pour augmenter les probabilités d'obtenir une valeur ajoutée largement positive, il faudrait que le *drawdown* minimum obtenu sur la période simulée tende vers -100 %, que le rendement moyen soit le plus faible possible et que son kurtosis soit le plus grand possible, que le log de la variance conditionnelle soit haut, volatil et leptokurtique, que la corrélation entre le prix du risque et la variance conditionnelle tende vers -1 et que l'exposition moyenne au marché soit la plus grande possible. La figure 4.6 indique que ces caractéristiques tendent à être plus souvent respectées lorsque l'horizon augmente.

Par exemple, la médiane du *drawdown* minimum obtenu décroît systématiquement lorsque l'horizon augmente, ce qui est tout-à-fait normal puisque la création d'un *drawdown* nécessite le passage du temps pour accumuler les rendements négatifs. En ne regardant alors que cette caractéristique, il est normal que, sur de longs

²² Le comportement des variables en fonction de la méthode de simulation *stationary bootstrap* est tout-à-fait similaire. La figure A3.3, à l'appendice III, présente les résultats relatifs aux simulations faites à partir de cette méthode.

horizons de placement, le pourcentage de simulations avec un alpha positif soit plus grand. De façon similaire, dans la figure 4.6, on voit que l'étendue de la corrélation entre le prix du risque et la variance conditionnelle est immense avec un horizon d'un an. En fait, l'étendue de la corrélation présentée est pratiquement complète, allant de presque -0.8 jusqu'à 0.9.²³ En s'approchant de 50 ans d'horizon, la corrélation est beaucoup moins volatile d'une simulation à l'autre et est presque toujours contenue entre -0.2 et 0, donc presque toujours négative. Ce comportement favorise alors la création de valeur ajoutée sur de longues périodes. Évidemment, il faut tenir compte des autres caractéristiques en même temps. Ces deux exemples simples à une variable n'étaient qu'à titre illustratif.

Par la décroissance de la dispersion des variables, à l'exception des kurtosis et du *drawdown* minimum qui nécessitent le passage du temps pour survenir, habituellement, l'augmentation de l'horizon de placement augmente du même coup la probabilité de retrouver les valeurs de ces variables qui sont propices à une création de valeur significativement positive. C'est pourquoi il existe une relation positive entre l'horizon de placement et la valeur ajoutée par l'application d'une stratégie d'allocation active de l'exposition au facteur de marché.

²³ Il s'agit ici de la corrélation entre le prix du risque et la variance conditionnelle. En utilisant le coefficient de corrélation de Pearson, on sait que toute statistique de corrélation doit appartenir à l'intervalle -1 et 1, et ce, par construction.

5. Application à N titres risqués

Dans leurs travaux, MM soulèvent l'idée de combiner plusieurs facteurs de risque dans un seul portefeuille. Les auteurs utilisent alors le concept de frontière efficiente pour former un portefeuille optimal des expositions aux divers facteurs de risque dans l'espace moyenne-variance. Par exemple, en considérant les facteurs de taille (SMB), de momentum (Mom) et de marché (Mkt) comme trois actifs transigibles distincts, alors il est possible de créer un portefeuille combinant ces trois actifs à partir des espérances du rendement, de la variance et des covariances de chaque actif (ici facteur de risque). Bien que l'objectif de combiner plusieurs actifs risqués dans un même portefeuille soit compréhensible et même pertinent, l'utilisation d'une méthodologie comme la frontière efficiente est douteuse dans le présent contexte. En effet, elle présuppose l'hypothèse qu'un investisseur qui s'expose davantage à un facteur risqué devrait être compensé davantage. Pourtant, MM propose que cette compensation varie grandement dans le temps. Alors, peut-être existe-t-il aussi des déséquilibres quant aux différents ratios de rendement ajusté pour le risque des secteurs sur une base transversale. N'y aurait-il pas une méthodologie qui permettrait de tirer avantage de la proposition de MM relativement aux déséquilibres tant temporels que transversaux dans les rendements ajustés pour le risque des différents secteurs?

5.1 Hypothèses relatives à l'allocation transversale

Cette section en reste à l'exposition au facteur de marché. Le marché utilisé pour illustrer le facteur d'exposition est lui-même, évidemment, composé de plusieurs titres risqués, soit les actifs individuels pouvant être transigés en bourse. Dans les travaux de MM et dans ce présent travail, jusqu'ici, le marché a été traité comme étant un seul actif. Les résultats ignorent donc l'aspect méthodologique de l'allocation transversale (*cross-sectional allocation*). Il faut rappeler que, jusqu'ici, MM et ce

mémoire, utilisent la capitalisation boursière des titres comme base d'allocation transversale.

Cette partie soulève d'abord la question de la prise en considération des deux étapes de construction de portefeuille (allocation transversale et temporelle) qui permettent de tirer avantage des déséquilibres temporels du prix du risque. Ensuite, cette section propose une avenue pour considérer un cadre méthodologique plus complet traitant les propriétés de construction propres à l'allocation transversale et temporelle. De plus, et il est important de le souligner, ce travail ne prétend pas trouver la meilleure méthodologie d'allocation active en lien avec la gestion active de l'exposition temporelle aux divers facteurs de risque.

En considérant le marché comme un seul actif risqué répondant à des déséquilibres temporels d'un seul prix du risque, une hypothèse implicite naît. Cette dernière suggère que tous les éléments du marché répondent de façon synchrone au signal d'allocation temporelle que représente la variance conditionnelle de ce marché. Cette limite peut être illustrée par un exemple bien simple. Supposons, par exemple, que le marché soit composé de seulement deux groupes d'actifs, le premier groupe étant composés de titres agressifs et l'autre, de titres défensifs. Dans ce cas, l'allocation temporelle de l'exposition du marché pris en agrégat risquerait fortement d'ignorer les signaux temporels respectifs à chacun des groupes. Par exemple, au lieu de réduire l'exposition totale au marché, il serait peut-être préférable de changer l'exposition d'un groupe à l'autre. Ce mécanisme d'allocation transversale n'est pas étudié en détail dans les travaux de MM. La seule allocation transversale considérée par ces derniers étant une allocation transversale déterminée par la capitalisation boursière de chaque titre inclus dans le portefeuille de marché.

Pour tirer tout l'avantage du comportement des prix des risques, il existe une concession à faire dans la granularité des actifs risqués considérés. En prenant des actifs individuels, le risque idiosyncratique a de bonnes chances d'être important et de bouger

l'allocation trop fortement sur des signaux brouillés. Une construction à partir de secteurs d'activité semble être un bon compromis. Ce choix repose sur l'hypothèse que les actifs à l'intérieur d'un secteur donné devraient varier de façon similaire à un même signal. Ce choix propose également l'idée que, entre eux, chaque secteur est libre de répondre à un signal différent de façon différente. Donc, bien que les actifs à l'intérieur d'un secteur puissent avoir un comportement similaire, la désagrégation du marché au niveau sectoriel permet de tenir compte des différentes interactions entre les différents secteurs. De plus, chaque secteur devrait être suffisamment diversifié pour diminuer la partie du risque idiosyncratique et rendre le signal de la variance conditionnelle plus fiable. Rapach *et al.* (2018) démontrent qu'il est possible de tirer avantage des diverses dépendances temporelles entre les rendements des industries économiques. Les différentes industries ne sont donc pas parfaitement corrélées et les traiter distinctement permet d'amasser de l'information importante quant à la décision d'exposition temporelle aux industries mêmes. Dix secteurs seront alors utilisés comme étant les dix actifs risqués.

Les travaux de Johansen et Eckhoff (2016) ont déjà démontré que l'application de la stratégie dynamique proposée par MM au niveau des secteurs américains fonctionnent bien. Ces auteurs tentent l'application de la stratégie originale de MM sur les secteurs américains, considérés individuellement. Les auteurs ne rassemblent pas, en un même portefeuille, plus d'un secteur comme ce mémoire propose de le faire. La division sectorielle est celle utilisée par les données disponibles sur le site web de Kenneth French. Cette classification divise les actifs en dix catégories mutuellement exclusives : Les biens non-durables (NoDur), les biens durables (Durbl), le domaine manufacturier (Manuf), l'énergie (Enrgy), les hautes technologies (HiTec), les télécommunications (Telcm), les magasins de détail (Shops), les soins de santé (Hlth), les entreprises de services publics (Utils) et les autres (Other). Ces secteurs utilisés sont le groupement d'actifs sous-jacents où leurs rendements sont agrégés en fonction de la capitalisation boursière de chaque firme.

5.2 Importance de l'ordonnement des allocations

La première étape pour tester la pertinence d'une méthode de construction de portefeuille est de déterminer s'il existe des distinctions particulières entre faire l'allocation transversale à chaque période, puis faire une allocation temporelle de l'exposition en fonction du nouveau portefeuille de secteurs créé, ou vice-versa. Le terme allocation temporelle est toujours entendu ici comme la proposition de MM de varier dynamiquement l'exposition au facteur de risque selon les déséquilibres dans le prix du risque. Il est important de remarquer que MM utilisent l'ordre d'allocation transversale puis temporelle, même si cette première allocation n'est pas formellement expliquée dans leurs travaux.

Dans le but d'aider le lecteur à bien comprendre les deux méthodes de création de portefeuilles qui seront utilisées pour la suite de ce mémoire, les sous-sections qui suivent illustrent les différences qui découlent de ces deux méthodes de formation de portefeuille à l'aide d'un exemple simple.

5.2.1 Exemple d'allocation transversale suivie d'une allocation temporelle

Dans la présente sous-section, la méthode de création d'un portefeuille qui consiste à faire une allocation transversale suivi d'une allocation temporelle est illustrée. Posons d'abord l'hypothèse que chaque mois contient trois jours et que le marché n'est constitué que de deux secteurs d'activité. De plus, pour simplifier, posons les hypothèses que le taux sans risque est de 0 % et que le poids d'un secteur au temps t , w_t , est défini comme $w_t = \frac{c}{\sigma_t^2}$ au lieu de $w_t = \frac{c}{\sigma_{t-1}^2}$. Supposons enfin que les rendements des deux secteurs, pour les deux mois observés (6 jours) sont :

$$\begin{array}{l} \text{secteur 1} \\ \text{secteur 2} \end{array} \begin{array}{c} \text{mois 1} \\ \begin{pmatrix} j1 & j2 & j3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix} \end{array} \text{et} \begin{array}{c} \text{mois 2} \\ \begin{pmatrix} j4 & j5 & j6 \\ -1 & 7 & -3 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Posons ensuite que l'allocation transversale n'est que $1/N$, où N correspond au nombre de secteurs. Donc, les matrices d'allocation transversales pour la période sont :

$$\begin{matrix} & \text{mois 1} & & \text{mois 2} \\ \text{secteur 1} & \begin{pmatrix} j1 & j2 & j3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} & \text{et} & \begin{pmatrix} j4 & j5 & j6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \\ \text{secteur 2} & & & \end{matrix}.$$

Si l'on fait l'allocation transversale dans un premier temps, puis l'allocation temporelle, les rendements pour le portefeuille de secteurs créé sont :

$$\text{portefeuille de secteur} \quad \begin{matrix} \text{mois 1} \\ \begin{pmatrix} j1 & j2 & j3 \\ 2.5 & -1.5 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ et } \begin{matrix} \text{mois 2} \\ \begin{pmatrix} j4 & j5 & j6 \\ 0 & 6.5 & 1.5 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

À partir de ces rendements, il est possible de calculer une variance réalisée pour chacun des deux mois observés. Les variances sont ici de 4.75 et de 11.58 pour les mois un et deux, respectivement. Celles-ci permettent alors de définir un poids alloué au portefeuille de secteurs créé. Si on pose que le c est égal à 10, alors les poids alloués sont de 2.10 ($10/4.75$) pour le premier mois et de 0.86 ($10/11.58$) pour le deuxième mois. Donc, les rendements du portefeuille final, après les deux allocations, en se rappelant que le taux sans risque est ici égal à 0, sont :

$$\text{portefeuille final} \quad \begin{matrix} \text{mois 1} \\ \begin{pmatrix} j1 & j2 & j3 \\ 5.26 & -3.16 & -2.11 \end{pmatrix} \end{matrix} \text{ et } \begin{matrix} \text{mois 2} \\ \begin{pmatrix} j4 & j5 & j6 \\ 0.00 & 5.61 & 1.29 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

5.2.2 Exemple d'allocation temporelle suivie d'une allocation transversale

Lorsque l'on fait l'allocation temporelle dans un premier temps, puis l'allocation transversale, le vecteur de rendements du portefeuille final ne sera pas le même. En fait, dans le cas présent, la première étape est de calculer la variance

mensuelle réalisée de chaque secteur pour chaque mois à partir des rendements journaliers initiaux. Ainsi, les variances réalisées sont :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{mois 1} & \text{mois 2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{secteur 1} \\ \text{secteur 2} \end{array} & \begin{pmatrix} 12.0 & 28.0 \\ 13.0 & 8.3 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Cette matrice permet alors d'attribuer un poids préliminaire à chaque secteur pour chaque période. Dans ce cas, il y a deux variables d'ajustement c puisque les deux secteurs sont traités individuellement jusqu'à présent. Donc, posons que c_1 , la constante d'ajustement du secteur 1, est de 12 et que c_2 , la constante d'ajustement du secteur 2, est de 10. La matrice d'allocation temporelle, se rappelant que, $w_t = \frac{c}{\sigma_t^2}$, est alors :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{mois 1} & \text{mois 2} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{secteur 1} \\ \text{secteur 2} \end{array} & \begin{pmatrix} 12/12 & 12/28 \\ 10/13 & 10/8.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0.43 \\ 0.77 & 1.2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Si l'on utilise toujours la matrice d'allocation transversale où chaque élément est de $1/N$, alors la matrice d'allocation finale est :

$$\begin{array}{c} \text{secteur 1} \\ \text{secteur 2} \\ r_f \end{array} \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} \text{mois 1} & \text{mois 2} \\ 1 \cdot 0.5 & 0.43 \cdot 0.5 \\ 0.77 \cdot 0.5 & 1.2 \cdot 0.5 \end{array} \\ 1 - (1 \cdot 0.5 + 0.77 \cdot 0.5) & 1 - (0.43 \cdot 0.5 + 1.2 \cdot 0.5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{mois 1} & \text{mois 2} \\ 0.50 & 0.21 \\ 0.38 & 0.60 \\ 0.12 & 0.19 \end{pmatrix} .$$

Donc, les rendements du portefeuille final sont :

$$\text{portefeuille final} \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} \text{mois 1} \\ j1 & j2 & j3 \\ 2.04 & -1.73 & -0.65 \end{array} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \begin{array}{cc} \text{mois 2} \\ j4 & j5 & j6 \\ 0.39 & 5.10 & 2.96 \end{array} \end{pmatrix} .$$

$$\text{où } 2.04 = \text{poids}_{\text{sect1};j1} \cdot r_{\text{sect1};j1} + \text{poids}_{\text{sect2};j1} \cdot r_{\text{sect2};j1} + \text{poids}_{rf;j1} \cdot r_{f;j1} = \\ 0.5 \cdot 1 + 0.38 \cdot 4 + 0.12 \cdot 0.$$

On voit que, bien que les méthodes utilisent les mêmes rendements des mêmes secteurs, l'ordonnement des allocations transversale et temporelle crée deux portefeuilles finaux avec des rendements différents.

5.3 Méthodologies testées

En tout, sept méthodologies de construction de portefeuilles sont évaluées, en plus de celle qui est indirectement proposée par MM, où l'allocation transversale se fait selon la capitalisation boursière, et pour laquelle les résultats sont présentés en profondeur à la section 2.2. D'abord sont présentées les méthodologies qui considèrent dans un premier temps l'allocation temporelle, puis l'allocation transversale. Ensuite sont présentées les méthodologies où l'exposition transversale est d'abord considérée, suivie par l'allocation temporelle.

5.3.1 Allocation temporelle puis transversale

Pour ces méthodologies de construction de portefeuille, les secteurs sont d'abord traités de façon individuelle en appliquant à chacun la stratégie dynamique proposée par MM. Une première matrice de poids est ainsi créée et est de dimension T par 10, où T représente le nombre de mois observés et 10 le nombre de secteurs. Les poids des secteurs à chaque période sont tels que :

$$w_{i,t+1} = \frac{c_i}{\sigma_{i,t}^2} \quad \forall i \in [1, 10] .^{24} \quad (5.1)$$

²⁴ La variable c_i de l'équation 5.1 est calculée de sorte que la variance des rendements d'un secteur i donné dans l'allocation temporelle soit égale à la variance des rendements du secteur (détenu passivement) sur l'ensemble de la période.

Une seconde matrice est ensuite créée pour représenter l'allocation transversale. C'est cette matrice qui diffère selon les méthodes testées. Cette deuxième matrice est superposée à la première, de sorte que chaque élément de la matrice résultante est le produit des éléments respectifs de chacune des deux matrices de poids. Plus précisément, il s'agit d'opérer un produit matriciel de Hadamard sur les deux matrices d'allocation, comme illustré à la section 5.2.2.

Base équipondérée

Une première technique de construction de l'allocation transversale est faite sur une base équipondérée. C'est-à-dire que la seconde matrice du produit matriciel de Hadamard est une matrice T par N , où T correspond au nombre de jours compris dans un mois donné et N représente le nombre de secteurs, soit 10. Dans cette technique, chaque élément de la matrice correspond donc à un dixième. Il s'agit de la plus simple et de la plus naïve allocation transversale possible.

Base selon la capitalisation boursière

Une seconde technique propose d'utiliser la capitalisation boursière de chaque secteur à la période t pour l'allocation transversale à $t+1$, soit :

$$w_{i,t+1} = \frac{\text{valeur secteur}_{i,t}}{\sum_{i=1}^{10} \text{valeur secteur}_{i,t}} . \quad (5.2)$$

Cette technique agit donc à titre de contrôle quant à l'ordre des allocations en comparaison directe avec les résultats de MM. En effet, la seule différence entre la méthode suggérée ici et celle qui est implicite dans les travaux de MM est qu'une première allocation temporelle est ici effectuée sur les secteurs considérés individuellement avant de les combiner selon leur capitalisation boursière.

Base selon le portefeuille de minimum variance globale

Les résultats originaux de MM laissent sous-entendre qu'il est préférable de s'exposer davantage à un facteur de risque lorsque celui-ci présente temporellement une faible variance conditionnelle. Cette logique est alors testée au niveau de l'allocation transversale par l'entremise de la construction d'une allocation visant le portefeuille minimum variance globale. De plus, cette logique s'inscrit dans la direction de Jobson et Korkie (1980) qui propose de viser une allocation en fonction du portefeuille minimum variance globale pour éviter les erreurs coûteuses de prévision des rendements. La méthode propose donc d'allouer plus de poids aux actifs contribuant le moins à la variance du portefeuille, en supposant qu'une plus faible contribution à la variance est signe d'un plus grand rendement ajusté pour le risque, temporellement, pour ce secteur. Cette construction présuppose l'utilisation du concept de frontière efficiente. Ainsi, le poids alloué à chaque secteur se retrouvant dans la seconde matrice pour un mois donné est :

$$W_{t+1} = \frac{V_t^{-1}\underline{1}}{\underline{1}'V_t^{-1}\underline{1}}, \quad (5.3)$$

où V_t est la matrice des covariances mensuelles construite avec les rendements journaliers de chaque secteur au mois t , W_{t+1} est le vecteur des pondérations des dix secteurs, et $\underline{1}$ est un vecteur unitaire d'ordre 10×1 .

Base selon le risque non-systématique

La dernière méthodologie d'allocation transversale testée est l'allocation selon la base du risque non-systématique d'un certain secteur comparativement au marché construit sur la base des capitalisations boursières. Les travaux de Ang *et al.* (2006) démontrent une relation négative existant entre le risque idiosyncratique et l'espérance de rendement aux périodes suivantes. Les variances et les bêtas de chaque titre pour chaque mois sont calculés d'après les rendements journaliers dudit mois. Le risque non-systématique du secteur i au mois t est défini comme étant :

$$\sigma_{\epsilon,i,t}^2 = \sigma_{totale,i,t}^2 - \beta_{i,t}^2 \sigma_{marché,t}^2 .^{25} \quad (5.4)$$

Dans l'équation 5.4, $\sigma_{totale,i,t}^2$ représente la variance totale des rendements du secteur i pour le mois t alors que $\sigma_{marché,t}^2$ représente la variance totale des rendements du marché au temps t . Une fois le risque non-systématique calculé, $\sigma_{\epsilon,i,t}^2$, une allocation transversale est faite sur l'hypothèse qu'il existe une relation inverse entre cette mesure de risque et le prix du risque. S'il est vrai que les investisseurs ne sont compensés que pour la partie systématique du risque d'un actif, le risque non-systématique pouvant facilement être diversifié, alors une hausse du risque non-systématique devrait diminuer le prix du risque de l'actif considéré au point où le rendement par unité ne justifie plus l'exposition à cet actif à ce moment. L'allocation transversale créant la seconde matrice d'allocation est donc définie telle que :

$$w_{i,t+1} = \frac{(\sigma_{\epsilon,i,t}^2)^{-1}}{\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{\sigma_{\epsilon,i,t}^2} \right)} . \quad (5.5)$$

Une fois les allocations temporelles et transversales calculées pour chaque méthode, la matrice d'allocation finale et les rendements mensuels sectoriels et du titre sans risque permettent de calculer les rendements mensuels du nouveau portefeuille géré activement.

Dans tous ces types d'allocation transversale, il existe une composante temporelle dans le sens où est posée l'hypothèse que les caractéristiques propres à l'allocation transversale ont une persistance dans le temps. En d'autres mots, c'est dire que $E_t[V_{t+1}] = V_t$, $E_t[\beta_{i,t+1}] = \beta_{i,t}$ et $E_t[\sigma_{\epsilon,i,t+1}^2] = \sigma_{\epsilon,i,t}^2$. De meilleurs prévisions de ces caractéristiques auraient alors potentiellement le pouvoir d'améliorer les performances du portefeuille construit.

²⁵ $\beta_{i,t} = \frac{cov_t(\text{secteur}_i, \text{marché})}{\sigma_{marché,t}^2} .$

5.3.2 Allocation transversale puis temporelle

Pour ce qui est de l'étape de l'allocation transversale, est testée la création de portefeuilles de secteurs à chaque jour à partir de pondérations égales, du portefeuille minimum variance globale et du risque non-systématique de chaque secteur. La méthode selon la capitalisation boursière répèterait exactement les résultats présentés dans MM. Dans tous les cas, le contexte méthodologique est le même, soit partir des rendements journaliers de chaque secteur pour créer, mensuellement, un portefeuille de secteurs. C'est à partir de ce portefeuille de secteurs que sont répétées les étapes d'allocation temporelle de l'exposition proposée par MM, comme le démontrent les équations suivantes :

$$R_{ptf,t} = \sum_{i=1}^{10} R_{i,t} \cdot w_{i,t} \quad (5.6)$$

$$\sigma_{ptf,t}^2 = W'_{p,t} V_t W_{p,t} \quad (5.7)$$

$$w_{ptf,t+1} = \frac{c}{\sigma_{ptf,t}^2} \quad (5.8)$$

Dans l'équation 5.6, $R_{ptf,t}$ représente le rendement à t du portefeuille créé selon les diverses méthodologies de construction alors que $R_{i,t}$ est le rendement du secteur i à t . Pour éviter les répétitions, les techniques d'allocation transversale utilisées dans cette sous-section pour déterminer $w_{i,t}$ (ou encore $W_{p,t}$), soient les poids alloués à chaque secteur au jour t , retrouvés aux équations 5.6 et 5.7, sont les mêmes que celles présentées dans les équations 5.2, 5.3 et 5.5. La différence essentielle est que l'allocation temporelle n'est faite que sur le portefeuille final constitué des secteurs. Les résultats seront alors pertinents comme base comparative pour l'importance de l'ordonnancement des étapes d'allocation.

5.4 Analyse des résultats des diverses allocations

Cette section présente les résultats de l'application d'une stratégie dynamique sur les différents portefeuilles construits selon les méthodologies présentées dans la section précédente. Comme l'importance de la construction d'un portefeuille est d'arriver à de meilleurs rendements par unité de risque, les diverses constructions de portefeuille sont évaluées en fonction de leur ratio Sharpe. Un ratio plus élevé se traduit par une meilleure méthodologie de construction dudit portefeuille puisque les mêmes actifs sont utilisés sur le même échantillon temporel. Par ailleurs, si l'on fait l'hypothèse que l'investisseur puisse utiliser le levier financier à sa volonté avec le titre sans risque, à chaque méthode pourrait s'ajouter un ajustement du levier pour atteindre un niveau de rendement ou de risque déterminé. Cependant, cet ajustement ne changerait en rien le ratio Sharpe des méthodes.

La partie A du tableau 5.1 présente les ratios Sharpe des différentes méthodologies de construction de portefeuille sur l'échantillon original couvrant la période allant de 1926 à 2017. La partie B du tableau 5.1 présente les résultats des tests de signification de la différence entre les valeurs d'une paire de ratio Sharpe sous forme de valeurs p . Le test d'hypothèse utilisé est celui présenté par Memmel (2003) qui quantifie la signification statistique de la différence de deux ratios Sharpe. L'hypothèse nulle est toujours que la différence est égale à zéro. Ainsi, si une valeur p est inférieure à un seuil de signification donné, par exemple 5 % ou 10 %, c'est qu'il existe une différence significative entre les valeurs des deux ratios Sharpe sous observation. Les deux parties du tableau 5.1 doivent donc être traitées conjointement pour bien juger des différences dans les ratios Sharpe présentés.

Tableau 5.1 ici

D'abord, le tableau 5.1 permet de remarquer que bien que tous les ratios Sharpe, sauf un, soient plus élevés que celui du marché, seulement quatre méthodes de

construction de portefeuille ont un rendement ajusté pour le risque significativement supérieur au marché. À l'exception de la méthode du portefeuille de minimum variance globale, toutes les méthodes testées qui proposaient une allocation temporelle avant celle transversale permettent d'atteindre un meilleur rendement par unité de risque que le marché. Pour ce qui est des méthodes faisant l'allocation transversale d'abord puis l'allocation temporelle, seulement l'allocation transversale équilibrée permet d'obtenir un ratio Sharpe significativement supérieur à celui du marché. La dernière ligne de la deuxième partie du tableau permet de constater cette affirmation.

L'hypothèse qu'il existe une différence dans les résultats relativement à l'ordonnement des allocations temporelle et transversale semble également confirmée par les résultats présentés dans le tableau 5.1. Pour chacune des méthodes d'allocation transversale, à l'exception de celle où l'allocation se fait selon le risque non-systématique, faire une allocation temporelle dans un premier temps permet d'ajouter une valeur significative. Cette observation se base sur les valeurs des ratios Sharpe en question, conjointement aux valeurs p des tests respectifs inférieures à 0.05 observées dans la partie B du tableau. Ces quatre valeurs se trouvent à former une diagonale qui débute à la deuxième colonne et à la cinquième rangée (0.04, 0.02, 0.02 et 0.13) de la partie B du tableau 5.1.

Il semble donc que l'hypothèse stipulant que toutes les composantes du marché réagissent de la même façon à un choc de la variance conditionnelle du marché agrégé soit trop forte pour soutenir les résultats empiriques. Au contraire, l'investisseur peut ajouter une valeur plus grande en subdivisant le marché en sous-groupes selon les caractéristiques communes de certains actifs entre eux. Ici, l'analyse ne tente pas de trouver la meilleure granularité des sous-groupes permettant de pouvoir optimiser la rétention d'information contenue dans les différentes variances conditionnelles de chaque sous-groupe possible. Les résultats ne font que démontrer que, dans un même marché, il y a différents types d'actifs qui répondent à des signaux différents quant à l'espérance de leurs rendements et de leurs variances conditionnelles respectifs. La

subdivision du marché permet alors de tenir compte de cette pluralité de signaux temporels.

Il est à noter que la meilleure méthodologie testée est celle où l'allocation transversale est faite la plus naïvement possible, soit la méthodologie du $1/N$. Ce résultat est d'ailleurs compatible avec les travaux de DeMiguel, Garlappi et Uppal (2007) qui démontrent que l'allocation $1/N$ permet d'obtenir un ratio Sharpe *out-of-sample* plus élevé que la plupart des autres méthodes d'allocation d'actifs. Cette méthode permet de minimiser les erreurs de prévisions puisque, dans ce cas particulier, l'allocation transversale ne nécessite l'estimation d'aucun paramètre. De plus, il est intéressant de noter que l'allocation transversale de façon équipondérée a implicitement une perception contrariante (*contrarian*) puisque, temporellement, elle propose de vendre les actifs qui ont connu les plus grands succès et d'acheter ceux qui ont perdu le plus de valeur relative. Au contraire, pourtant, l'allocation temporelle présente dans les travaux de MM propose une perception de *momentum*. En effet, il est démontré à la section 4.3 qu'avec l'effet de levier, une relation positive apparaît entre le rendement et les allocations temporelles subséquentes, où les effets d'un rendement sur les périodes suivantes s'estompent avec le passage du temps.

5.5 Retour sur l'horizon de placement à N actifs risqués

Cette section a comme objectif de conclure sur la pertinence de subdiviser le marché pour considérer plusieurs signaux temporels en fonction de similarités entre les éléments d'un même sous-groupe. L'hypothèse est que, pour tout horizon de placement, la proportion d'alphas générés significativement positifs du portefeuille contenant des sous-groupes devrait être supérieure à celle d'un portefeuille construit à partir du marché agrégé. L'analyse du comportement du portefeuille proposé en fonction de l'horizon de placement peut aider à constater les différences pour la mise en application de la stratégie en temps réel par un investisseur. La confirmation de cette hypothèse pourrait permettre à l'investisseur de déployer son capital sur de moins longues périodes pour récupérer les fruits des déséquilibres temporels dans les

différents ratios de rendement excédentaire ajusté pour le risque de chaque secteur, soit les déséquilibres temporels de $\frac{E_t[r_{i,t+1}-r_{f,t+1}]}{E_t[\sigma_{i,t+1}^2]}$, où l'indice i fait référence à un secteur donné.

5.5.1 Méthodologie de simulation à N actifs risqués

Des huit méthodes de simulation proposées à la section 3, seul le *stationary bootstrap* permet de bien reproduire les caractéristiques importantes de la distribution des rendements des dix secteurs. D'abord, la marche aléatoire et le *simple resampling* n'apporteraient que bien peu de validité, si validité il y avait, en raison de leur hypothèse restrictive d'indépendance des rendements. Ensuite, les modèles de type GARCH(p,q), tout comme le *wild bootstrap*, devraient être modélisés de façon multivariée pour bien représenter les interactions entre les différents secteurs. Ces modèles ne permettent que difficilement de tenir compte de plusieurs variables puisque la multiplication des paramètres à estimer devient rapidement importante.

Pour sa part, le *stationary bootstrap* permet de conserver les interactions entre les secteurs en pigeant des blocs aux mêmes dates pour chaque secteur. La pige de blocs de dates conserve la structure intersectorielle, du moins, jusqu'à la fin des blocs. Les relations importantes dans la propagation des chocs de rendement ou de variance conditionnelle de certains secteurs à d'autres, de façon instantanée ou bien temporellement, seront alors modélisées. Si la relation survient sur un horizon plus grand que celui du bloc, alors cette relation ne sera pas reproduite par la simulation, mais seulement pour le présent bloc. La longueur des blocs variant, telle que démontrée aux équations 3.11 et 3.12, on peut espérer que les structures de dépendance entre les rendements des secteurs seront respectées. De plus, il s'agissait de l'une des méthodes qui permettait une bonne validité des résultats simulés à la modélisation des caractéristiques empiriques importantes des rendements du marché, comme l'hétéroscédasticité et l'effet de levier.

La construction du portefeuille à N actifs risqués choisie est celle où l'allocation temporelle survient avant l'allocation transversale et où cette dernière n'est autre que $1/N$, soit un portefeuille transversal équipondéré. Cette méthodologie de construction est utilisée puisqu'il s'agit de la méthode, parmi celles présentées à la section 5.3, qui produit le meilleur ratio Sharpe. Les étapes d'une simulation de T jours sont donc les suivantes :

1. Déterminer les dates à piger et tirer les rendements de chaque secteur respectivement à celles-ci pour créer une matrice T par 10 de rendements;
2. Construire l'allocation temporelle pour chaque secteur selon la stratégie dynamique proposée par MM. Cette étape crée la première matrice d'allocation, soit celle temporelle, telle que discutée à la sous-section 5.3.2;
3. Multiplier, au sens matriciel de Hadamard, la matrice d'allocation temporelle de l'étape 2 par la matrice d'allocation transversale (ici, cette étape revient à multiplier la première matrice par le scalaire $1/10$);
4. Calculer le rendement du portefeuille créé géré activement.

5.5.2 Résultats des simulations à N actifs risqués

Cette section reprend l'analyse de la valeur créée par la stratégie active en fonction de l'horizon de placement. Les résultats portent sur le portefeuille sectoriel construit en deux étapes selon la méthodologie où l'allocation temporelle est faite en premier et où l'allocation transversale est faite sur une base équipondérée. Il s'agit de la meilleure méthodologie de construction proposée précédemment. Il a été démontré que la construction de ce portefeuille géré activement permet d'atteindre un meilleur ratio Sharpe que la stratégie dynamique en une étape proposée par MM. Il est alors normal de croire que, pour tout horizon de placement, ce portefeuille construit en deux étapes permette d'espérer recevoir plus fréquemment une valeur ajoutée significativement positive que le permet la stratégie dynamique proposée par MM.

La figure 5.1 reprend la représentation graphique présentée à la figure 4.1. La même discussion faite pour la figure 4.1 sur l'interprétation de la figure et sur ses limites s'applique pour la figure 5.1. Cette figure présente les résultats graphiques de la relation entre les proportions d'alphas significativement positifs et négatifs en fonction de l'horizon de placement simulé pour le portefeuille construit en deux étapes et le portefeuille construit en une seule étape, soit la stratégie originale de MM. Il est à noter que les résultats de ce dernier portefeuille sont les mêmes qu'à la figure 4.1, évidemment, et ne réapparaissent ici que pour faciliter la comparaison. Pour chaque horizon, 1500 simulations ont été faites pour le portefeuille construit en deux étapes.

Figure 5.1 ici

Les résultats présents supportent l'hypothèse énoncée au début de la présente section. La construction d'une stratégie qui considère plusieurs titres risqués séparément pour l'application de l'exposition à leur ratio de rendement excédentaire ajusté pour le risque respectif permet d'accroître la valeur ajoutée positive, et ce, peu importe l'horizon de placement choisi. En effet, le pourcentage d'alphas significativement supérieurs à zéro est systématiquement plus élevé pour ce type de portefeuille, en comparaison avec un portefeuille respectant la stratégie dynamique proposée par MM. L'affirmation est supportée par le fait que la ligne jaune est systématiquement plus élevée que la ligne bleue et ce, pour tout horizon de placement. De plus, le pourcentage d'alphas significativement négatifs générés par ce premier type de portefeuille est presque toujours inférieur au portefeuille suivant les prescriptions de MM.

Pour appuyer les résultats présentés à la figure 5.1, le tableau 5.2 présente certaines statistiques des 1500 alphas simulés pour chaque horizon, allant de 1 à 90 ans. Les statistiques observées pour chaque horizon sont les alphas moyens, l'écart-type, la valeur p de la moyenne, le minimum et le maximum. Ce tableau agit comme une comparaison naturelle au tableau A3.1 à l'appendice III, lequel présente les mêmes

statistiques pour les simulations faites avec le *stationary bootstrap* à partir de la stratégie dynamique appliquée au marché. En comparant les résultats des deux tableaux, il est possible de juger de l'effet de la désagrégation du marché, au niveau sectoriel, sur la valeur ajoutée espérée de la stratégie dynamique.

Tableau 5.2 ici

Dans le tableau 5.2, le comportement des statistiques est similaire à celles présentées dans le tableau A3.1 à l'appendice III, dans le sens où le alpha moyen est croissant de 1 à 25 ans puis stagne mais, cette fois-ci, aux alentours de 4.4 % (au lieu de 3.6 %). De plus, l'écart-type des alphas est négativement relié à l'horizon de placement, passant de 12.1 % à 1.8 % pour les horizons respectifs de 1 et 90 ans. Donc, tout comme les résultats du tableau A3.1 à l'appendice III, la valeur p testant le degré de signification statistique de la moyenne des alphas est, en général, positivement liée à l'horizon de placement. La majeure différence entre les deux tableaux est que la désagrégation du marché au niveau sectoriel permet d'atteindre une valeur ajoutée significative plus rapidement que l'application de la stratégie dynamique sur le marché. En effet, comme on peut voir dans le tableau 5.2, les valeurs p deviennent supérieures au seuil standard de 1.96 à partir d'un horizon de placement de 65 ans, alors que, dans le tableau A3.1 à l'appendice III, les alphas ne sont jamais significativement positifs aux horizons testés. Bien que 65 ans demeurent un long horizon de placement, avec la subdivision du marché en secteurs, l'horizon est réduit d'au moins 25 ans avant d'obtenir une valeur ajoutée espérée significative similaire à l'application de la stratégie dynamique sur le marché.

Dans le cadre de l'application d'une gestion active de l'exposition à divers facteurs de risque, ces résultats soutiennent qu'il existe un avantage réel à traiter le marché comme une somme d'éléments plutôt qu'un tout. Les présents résultats posent les bases d'une méthodologie plus complète de construction de portefeuille pour tirer avantage des déséquilibres existant dans les ratios de rendement excédentaire ajusté

pour le risque des N actifs risqués. Ici, les dix secteurs du marché sont considérés comme les actifs risqués. Il serait intéressant de tester les principaux résultats en utilisant un autre type de subdivision des actifs.

Le constat sur l'importance de l'ordonnement des allocations dans la méthodologie en deux étapes proposée soulève le questionnement de la possibilité de considérer tant l'allocation temporelle que l'allocation transversale en une seule étape intégrée. Peut-être qu'une méthodologie en une étape permettrait de tirer un maximum des avantages des déséquilibres des ratios de rendement excédentaire ajusté pour le risque retrouvés dans les différentes subdivisions du marché. Un problème de circularité rend cependant cet aspect complexe. Pour allouer temporellement l'exposition à un facteur de risque, il faut calculer la variance conditionnelle de ce dernier. Pourtant, pour calculer la variance conditionnelle, il faut avoir déterminé les poids transversaux de chaque actif risqué.

Conclusion

Dans leur article de 2017, Moreira et Muir présentaient l'anomalie de marché des déséquilibres du prix du risque de plusieurs facteurs de risque en raison de différences dans la persistance des deux premiers moments des distributions conditionnelles des rendements de ceux-ci. Ces déséquilibres pouvaient être exploités par les investisseurs pour augmenter le rendement par unité de risque par l'application d'une exposition active à ces facteurs de risque en fonction du niveau de leur variance conditionnelle. La valeur ajoutée de cette stratégie d'allocation active semble être créée à partir d'un processus d'épargne et de consommation de risque aux moments appropriés, par une composante de signalement de changement de régime, de la relation entre la variance conditionnelle et la probabilité de la direction de marché et de l'utilisation du levier financier pour profiter du haut prix du risque lors des régimes de basse variance conditionnelle.

Ce mémoire s'est attardé aux spécificités des résultats en fonction des caractéristiques retrouvées dans divers échantillons simulés sur le facteur de marché, en plus de mesurer l'impact de l'horizon de placement sur la valeur ajoutée pouvant être attendue par un investisseur appliquant la stratégie proposée par Moreira et Muir (2017) sur ce facteur de risque. Les hypothèses que la valeur ajoutée est positivement reliée à l'horizon de placement et qu'un investisseur doit déployer son capital dans cette stratégie pendant un long horizon pour réaliser un gain significatif sont confirmées. Ensuite, l'évaluation de l'inclusion d'une construction de portefeuille en deux temps, soit par l'allocation transversale et temporelle, à la stratégie dynamique initialement proposée semble démontrer que l'horizon de placement, bien que toujours d'importance, peut être réduit sensiblement pour réaliser un gain similaire produit par la simple considération de l'allocation dynamique de l'exposition au facteur de marché.

Malgré la confirmation des principales hypothèses, plusieurs questions demeurent quant à l'application de ce type de stratégie d'allocation active par un investisseur. Une importante limite de ce mémoire est que la plupart des résultats relatifs aux divers tests d'hypothèse se basent sur des simulations. Évidemment, aucune simulation ne peut peindre un portrait absolument réaliste. Par exemple, dans le paramétrage des méthodes servant à simuler les rendements, l'échantillon entier a été utilisé. Pourtant, il est possible de croire que plusieurs régimes de marché existent, comme les régimes de hausse et de baisse (*bull* et *bear markets*). Chacun d'eux pourrait avoir une dynamique particulière où les paramètres mesurés pourraient avoir des valeurs significativement différentes. En d'autres mots, le processus générateur des rendements pourrait bien être fonction des différents régimes perçus dans le marché. Aussi, est-ce vrai et acceptable de proposer, comme il est fait dans ce mémoire, que le processus générateur des rendements est le même depuis le début du siècle dernier?

En plus des limites relatives à l'utilisation de simulations, deux avenues de recherche sont d'importance dans la continuité de la compréhension de l'impact de l'horizon de placement sur les principaux résultats. Le premier a trait à la fréquence d'observation et de rebalancement choisi. Dans ce mémoire, la fréquence d'observation est toujours journalière et les rebalancements se font toujours mensuellement. Peut-être que l'utilisation d'une plus haute fréquence, par exemple, observer les rendements intra-journaliers et rebalancer hebdomadairement, permettrait de faire converger les caractéristiques nécessaires plus rapidement vers leur zone de création de valeur, respectivement à la stratégie dynamique d'allocation proposée. Par contre, une plus grande fréquence de rebalancement engendrerait des frais de transaction plus élevés. En d'autres mots, est-ce que ce mémoire démontre qu'il faut un long horizon de placement pour créer une valeur significative ou démontre-t-il qu'il faut un nombre suffisant de rebalancements pour contrer les erreurs d'allocation et tirer avantage du comportement, en moyenne, des caractéristiques empiriques? Ce test d'hypothèse ne devrait pas changer le sens de la relation, mais pourrait bien changer la rapidité d'atteinte des valeurs ajoutées démontrées dans ce mémoire.

La seconde avenue de recherche est en rapport avec la stratégie dynamique même. Cette dernière n'est pas construite avec l'idée d'une construction de portefeuille en fonction de l'horizon de placement. Pourtant, Levy (1972, 1984) et Gunthorpe et Levy (1994) démontrent que l'allocation d'actifs optimale change selon les horizons de placement en raison, justement, du différent comportement du rendement et de la volatilité du portefeuille dans le passage du temps. Ces travaux démontrent qu'il existe une relation négative entre la variance du portefeuille optimal et l'horizon de placement, soit qu'en diminuant l'horizon de placement, le portefeuille ayant la plus grande variance sera également celui avec le meilleur rendement ajusté pour le risque, et vice-versa. L'inclusion d'un tel paramètre pourrait avoir des bienfaits sur la valeur créée par la stratégie originale, sans toutefois en changer la philosophie.

Bibliographie

- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X., & Ebens, H. (2001). *The distribution of realized stock return volatility*. Journal of financial economics, 61(1), p.43-76.
- Ang, A. (2014). *Asset management: A systematic approach to factor investing*. Oxford University Press.
- Ang, A., & Bekaert, G. (2003). *How do regimes affect asset allocation?* (No. w10080). National Bureau of Economic Research.
- Ang, A., Hodrick, R. J., Xing, Y., & Zhang, X. (2006). *The cross-section of volatility and expected returns*. The Journal of Finance, 61(1), p.259-299.
- Asness, C. S., Frazzini, A., & Pedersen, L. H. (2012). *Leverage aversion and risk parity*. Financial Analysts Journal, 68(1), p.47-59.
- Baker, M., Bradley, B., & Wurgler, J. (2011). *Benchmarks as limits to arbitrage: Understanding the low-volatility anomaly*. Financial Analysts Journal, 67(1), p.40-54.
- Bekiros, S. D., & Georgoutsos, D. A. (2008). *Direction-of-change forecasting using a volatility-based recurrent neural network*. Journal of Forecasting, 27(5), p.407-417.
- Beller, K. R., Kling, J. L., & Levinson, M. J. (1998). *Are industry stock returns predictable?* Financial Analysts Journal, p.42-57.
- Berge, T. J. (2015). *Predicting recessions with leading indicators: Model averaging and selection over the business cycle*. Journal of Forecasting, 34(6), p.455-471.
- Bollerslev, T. (1986). *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*. Journal of econometrics, 31(3), p.307-327.
- Bollerslev, T., Tauchen, G., & Zhou, H. (2009). *Expected stock returns and variance risk premia*. The Review of Financial Studies, 22(11), p.4463-4492.
- Cameron, C. (2017). *Bootstrap*. University of California - Davis.

- Chen, S. S. (2009). *Predicting the bear stock market: Macroeconomic variables as leading indicators*. Journal of Banking & Finance, 33(2), p.211-223.
- Choudhry, T., Papadimitriou, F. I., & Shabi, S. (2016). *Stock market volatility and business cycle: Evidence from linear and nonlinear causality tests*. Journal of Banking & Finance, 66, p.89-101.
- Christoffersen, P. F., & Diebold, F. X. (2006). *Financial asset returns, direction-of-change forecasting, and volatility dynamics*. Management Science, 52(8), p.1273-1287.
- DeMiguel, V., Garlappi, L., & Uppal, R. (2007). *Optimal versus naive diversification: How inefficient is the 1/N portfolio strategy?* The Review of Financial Studies, 22(5), p.1915-1953.
- Dimson, E., Marsh, P., & Staunton, M. (2003). *Global evidence on the equity risk premium*. Journal of Applied Corporate Finance, 15(4), p.27-38.
- Dreyer, A., Harlow, R. L., Hubrich, S., & Page, S. (2016). *Return of the Quants: Risk-Based Investing*. In CFA Institute Conference Proceedings Quarterly (Vol. 33, No. 3, p.1-13). CFA Institute.
- Fama, E. F., & French, K. R. (1992). *The cross-section of expected stock returns*. The Journal of Finance, 47(2), p.427-465.
- Faria, G., & Verona, F. (2017). *Forecasting the equity risk premium with frequency-decomposed predictors*.
- Flachaire, E. (2005). *Bootstrapping heteroskedastic regression models: wild bootstrap vs. pairs bootstrap*. Computational Statistics & Data Analysis, 49(2), p.361-376.
- Frazzini, A., & Pedersen, L. H. (2014). *Betting against beta*. Journal of Financial Economics, 111(1), p.1-25.
- Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). *On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*. The Journal of Finance, 48(5), p.1779-1801.
- Gunthorpe, D., & Levy, H. (1994). *Portfolio composition and the investment horizon*. Financial Analysts Journal, p.51-56.
- Harvey, C. R., Liu, Y., & Zhu, H. (2016). *... and the cross-section of expected returns*. The Review of Financial Studies, 29(1), p.5-68.

- He, A., Huang, D., & Zhou, G. (2018). *Pricing Error Reversal: A Diagnostic Test of Asset Pricing Models*.
- Huang, D., Jiang, F., Tu, J., & Zhou, G. (2017a). *Cost Behavior and Stock Returns*.
- Huang, D., Jiang, F., Tu, J., & Zhou, G. (2017b). *Forecasting stock returns in good and bad times: The role of market states*.
- Huang, D., Li, J., Wang, L., & Zhou, G. (2018). *Time-Series Momentum: Is it There?*
- Huang, D., Zhang, H., & Zhou, G. (2018). *Twin Momentum: Fundamental Trends Matter*.
- Jobson, J. D., & Korkie, B. (1980). *Estimation for Markowitz efficient portfolios*. Journal of the American Statistical Association, 75(371), p.544-554.
- Johansen, T. A., & Eckhoff, L. K. (2016). *Managing volatility: an empirical analysis of the time-series relation between risk and return Norwegian evidence* (thèse de mémoire).
- Kim, A. Y., Tse, Y., & Wald, J. K. (2016). *Time series momentum and volatility scaling*. Journal of Financial Markets, 30, p.103-124.
- Kole, E., & van Dijk, D. (2017). *How to identify and forecast bull and bear markets?* Journal of Applied Econometrics, 32(1), p.120-139.
- Levy, H. (1972). *Portfolio performance and the investment horizon*. Management Science, 18(12), p.B645-B653.
- Levy, H. (1984). *Measuring risk and performance over alternative investment horizons*. Financial Analysts Journal, p.61-68.
- Lie, E., Meng, B., Qian, Y., & Zhou, G. (2017). *Corporate Activities and the Market Risk Premium*.
- Liu, R. Y. (1988). *Bootstrap procedures under some non-iid models*. The Annals of Statistics, 16(4), p.1696-1708.
- Lundblad, C. (2007). *The risk return tradeoff in the long run: 1836–2003*. Journal of Financial Economics, 85(1), p.123-150.
- Maheu, J. M., McCurdy, T. H., & Song, Y. (2012). *Components of bull and bear markets: bull corrections and bear rallies*. Journal of Business & Economic Statistics, 30(3), p.391-403.

- Memmel, C. (2003). *Performance hypothesis testing with the Sharpe ratio*.
- Moreira, A., & Muir, T. (2017). *Volatility-Managed Portfolios*. The Journal of Finance, 72(4), p.1611-1644.
- Moreira, A., & Muir, T. (2019). *Should Long-Term Investors Time Volatility?* Journal of Financial Economics, 131(3), p.507-527.
- Neely, C. J., Rapach, D. E., Tu, J., & Zhou, G. (2014). *Forecasting the equity risk premium: the role of technical indicators*. Management Science, 60(7), p.1772-1791.
- Pagan, A. R., & Sossounov, K. A. (2003). *A simple framework for analysing bull and bear markets*. Journal of Applied Econometrics, 18(1), p.23-46.
- Pástor, L., & Stambaugh, R. F. (2012). *Are stocks really less volatile in the long run?* The Journal of Finance, 67(2), p.431-478.
- Politis, D. N., & Romano, J. P. (1994). *The stationary bootstrap*. Journal of the American Statistical association, 89(428), p.1303-1313.
- Rapach, D. E., Strauss, J. K., & Zhou, G. (2010). *Out-of-sample equity premium prediction: Combination forecasts and links to the real economy*. The Review of Financial Studies, 23(2), p.821-862.
- Rapach, D., Strauss, J., Tu, J., & Zhou, G. (2018). *Dynamic Return Dependencies Across Industries: A Machine Learning Approach*.
- Richard, P. (2018). *Économétrie financière*, Département d'économie, Université de Sherbrooke.
- Schwert, G. W. (1989). *Why does stock market volatility change over time?* The Journal of Finance, 44(5), p.1115-1153.
- Stock, J. H., & Watson, M. W. (2014). *Estimating turning points using large data sets*. Journal of Econometrics, 178, p.368-381.
- Zhou, G., & Zhu, Y. (2010). *Is the recent financial crisis really a "once-in-a-century" event?* Financial Analysts Journal, 66(1), p.24-27.

Appendice I

Tableaux

Tableau 2.1 :
Réplication des alphas présentés dans l'article de Moreira et Muir (2017)

A : Régressions univariées				
	1	2	3	4
	Mkt σ	SMB σ	HML σ	Mom σ
MktRF	0.61 (0.00)			
SMB		0.61 (0.00)		
HML			0.57 (0.00)	
Mom				0.47 (0.00)
$\hat{\alpha}$ (%)	5.14 (0.00)	-0.49 (0.71)	1.74 (0.04)	12.27 (0.00)
N	1,097	1,097	1,097	1,092
R ²	0.37	0.37	0.33	0.22
RMSE	50.95	30.32	34.22	49.52
B : Alphas contrôlés pour les trois facteurs de Fama-French				
$\hat{\alpha}$ (%)	5.69 (0.00)	-0.25 (0.61)	2.45 (0.01)	10.26 (0.00)
Notes :				
1. Toutes les statistiques sont annuelles.				
2. Le symbole σ suivant les abréviations des facteurs de risque indique qu'il s'agit du portefeuille géré activement. La régression utilisée est: $\text{facteur}\sigma = \alpha + \beta\text{facteur} + \varepsilon$				
3. Les chiffres entre parenthèses représentent les valeurs p .				

Tableau 4.1 :
Paramètres de l'estimation des modèles de type $GARCH(p,q)$ utilisés

	GARCH-M	TGARCH-M	ND-TGARCH-M	EGARCH-M
μ	0.050 (0.00)	0.038 (0.00)		0.034 (0.00)
λ	0.032 (0.00)	0.017 (0.01)	0.017 (0.01)	0.022 (0.00)
γ_0	0.012 (0.00)	0.014 (0.00)	0.014 (0.00)	0.000 (0.88)
γ_1	0.101 (0.00)	0.040 (0.00)	0.040 (0.00)	-0.074 (0.00)
δ_1	0.888 (0.00)	0.897 (0.00)	0.897 (0.00)	0.981 (0.00)
λ_1		0.113 (0.00)	0.113 (0.00)	0.161 (0.00)

Note:

Les chiffres entre parenthèses représentent les valeurs p .

Tableau 4.2 :

Statistiques des quatre premiers moments des rendements journaliers simulés selon la méthode de simulation

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		Original	Marche aléatoire	GARCH-M	TGARCH-M	EGARCH-M	ND-TGARCH-M	Simple resampling	Wild bootstrap	Stationary bootstrap
Valeur	E[R]	0.04	0.04	0.08	0.06	0.07	0.03	0.04	0.06	0.04
	Var[R]	1.13	1.13	1.20	1.24	1.43	1.53	1.13	1.13	1.13
	Skewness[R]	-0.13	0.00	0.05	0.16	0.08	0.18	-0.14	0.18	-0.14
	Kurtosis[R]	19.73	3.00	9.59	10.36	5.73	11.10	19.56	19.04	19.35
Cote Z	E[R]		0.03	5.55	2.55	2.70	-2.34	-0.03	1.95	-0.03
	Var[R]		0.01	0.33	0.58	3.64	1.70	-0.03	-0.21	0.02
	Skewness[R]		8.17	1.04	1.42	3.18	1.55	-0.04	1.16	-0.06
	Kurtosis[R]		-524.56	-1.24	-0.90	-29.38	-0.90	-0.05	-3.31	-0.11

Tableau 4.3 :
Caractéristiques des rendements mensuels simulés selon la méthode de simulation

		1	2	3	4	5	6	7	8	9
		Original	Marche aléatoire	GARCH-M	TGARCH-M	EGARCH-M	ND-TGARCH-M	Simple resampling	Wild bootstrap	Stationary bootstrap
Valeur	E[R]	0.94	0.92	1.80	1.28	1.48	0.54	0.92	1.20	0.93
	Var[R]	28.37	25.34	26.12	25.91	36.45	30.84	25.38	25.38	27.79
	Skewness[R]	0.16	0.14	0.43	0.14	1.46	0.17	0.12	0.90	-0.22
	Kurtosis[R]	10.87	3.03	7.40	7.42	7.64	7.48	3.78	11.77	9.24
	Première ac de la variance conditionnelle	0.61	0.00	0.71	0.69	0.54	0.69	0.00	0.53	0.46
Effet de levier		-0.24	0.00	0.02	-0.17	0.64	-0.18	0.00	0.06	-0.23
Cote Z	E[R]		-0.11	5.52	2.37	2.63	-2.64	-0.08	1.75	0.00
	Var[R]		-2.81	-0.63	-0.72	2.15	0.65	-2.38	-1.45	-0.14
	Skewness[R]		-0.27	0.72	-0.06	5.73	0.03	-0.36	1.36	-0.74
	Kurtosis[R]		-46.36	-1.56	-1.54	-2.13	-1.70	-17.90	0.31	-0.67
	Première ac de la variance conditionnelle		-20.41	1.79	1.29	-1.74	1.38	-20.75	-6.72	-1.58
Effet de levier			8.12	3.47	1.04	32.87	1.04	8.24	4.25	0.18

Tableau 4.4 :
Valeur ajoutée espérée en fonction de l'horizon de placement – TGARCH-M

Horizon (année)	$\bar{\alpha}$ (%)	σ_{α} (%)	Test t	Minimum (%)	Maximum (%)
1	-0.5	11.9	-0.04	-96.9	64.1
5	1.8	5.9	0.31	-27.4	36.2
10	3.0	4.6	0.66	-12.2	25.9
15	3.6	3.9	0.92	-6.6	24.5
20	3.7	3.3	1.12	-6.1	18.5
25	4.0	3.1	1.29	-4.4	16.5
30	3.9	2.8	1.41	-3.6	16.1
35	4.0	2.7	1.48	-3.5	13.8
40	3.8	2.5	1.52	-3.3	13.5
45	3.7	2.3	1.58	-3.4	16.7
50	3.4	2.1	1.57	-3.2	12.5
55	3.1	2.0	1.55	-2.8	10.0
60	2.9	1.9	1.51	-2.9	10.6
65	2.8	1.8	1.53	-2.4	10.7
70	2.9	1.7	1.72	-2.0	8.5
75	2.7	1.7	1.60	-1.7	11.7
80	2.9	1.7	1.72	-2.5	8.3
85	3.0	1.6	1.82	-1.9	8.5
90	3.1	1.6	1.97	-1.3	8.9

Tableau 4.5 :
Pouvoir explicatif des huit variables identifiées à l'aide de la méthode TGARCH-M

A : Régressions univariées			
	$\hat{\beta}$	valeur p	R^2
<i>Drawdown</i> minimum	-5.35	0.00	0.14
Moyenne des rendements	0.90	0.01	0.01
Kurtosis des rendements	0.27	0.00	0.15
$\ln \sigma_t^2$ - Moyenne	3.92	0.00	0.02
$\ln \sigma_t^2$ - Variance	9.34	0.00	0.20
$\ln \sigma_t^2$ - Kurtosis	0.77	0.00	0.07
Corrélation prix du risque et σ_t^2	-56.42	0.00	0.40
Allocation moyenne au marché	11.94	0.00	0.27
B : Régression multivariée			
	$\hat{\beta}$	valeur p	R^2
<i>Drawdown</i> minimum	-0.74	0.00	
Moyenne des rendements	-0.76	0.00	
Kurtosis des rendements	0.10	0.00	
$\ln \sigma_t^2$ - Moyenne	1.50	0.00	
$\ln \sigma_t^2$ - Variance	3.42	0.00	
$\ln \sigma_t^2$ - Kurtosis	1.05	0.00	
Corrélation prix du risque et σ_t^2	-76.61	0.00	
Allocation moyenne au marché	6.30	0.00	
			0.92

Tableau 5.1 :
Ratio Sharpe des différentes constructions de portefeuille actif

A : Ratios Sharpe calculés				
	Méthodologie d'allocation transversale			
	Équipondéré	Capitalisation boursière	Minimum variance	Risque non-syst.
Allocation temporelle puis transversale	0.232	0.223	0.186	0.218
Allocation transversale puis temporelle	0.217	0.207	0.139	0.205
Marché passif	0.176			

B : Signification statistique des différences testées entre les ratios Sharpe									
Méthodologie d'allocation transversale	Allocation temporelle puis transversale				Allocation transversale puis temporelle				Marché passif
	Équipondéré	Capitalisation boursière	Minimum variance	Risque non-syst.	Équipondéré	Capitalisation boursière	Minimum variance	Risque non-syst.	Capitalisation boursière
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2	0.02								
3	0.03								
4	0.05								
5	0.04								
6	0.00	0.02							
7	0.00		0.02						
8	0.00			0.13					
9	0.02	0.04	0.38	0.07	0.06	0.13	0.84	0.15	

Notes:

1. L'hypothèse nulle testée est qu'il n'existe aucune différence entre les deux ratios Sharpe du test.
2. Les valeurs p représentent un test unilatéral testant la différence entre les ratios Sharpe de l'axe horizontal et celui de l'axe vertical. Par exemple, la deuxième colonne du tableau teste si le ratio Sharpe de la première méthode d'allocation est supérieur à ceux de toutes les autres méthodes testées.
3. Les valeurs p en vert représentent les hypothèses pouvant être rejetées au seuil de 5% et celles surlignées en jaune au seuil de 10%.
4. Seules les valeurs p utiles aux diverses hypothèses du mémoire sont présentées.

Tableau 5.2 :
Valeur ajoutée espérée en fonction de l'horizon de placement – Stationary bootstrap sectoriel

Horizon (année)	$\bar{\alpha}$ (%)	σ_{α} (%)	Test t	Minimum (%)	Maximum (%)
1	1.3	12.1	0.11	-60.6	87.6
5	3.5	7.4	0.48	-21.2	50.1
10	4.3	5.3	0.81	-8.8	29.1
15	4.7	4.5	1.04	-8.0	25.3
20	4.8	3.9	1.23	-6.0	21.8
25	5.0	3.5	1.44	-4.4	19.7
30	4.9	3.1	1.58	-3.6	16.9
35	4.8	2.9	1.69	-4.5	21.0
40	4.7	2.7	1.73	-2.7	15.2
45	4.6	2.6	1.79	-2.6	13.3
50	4.6	2.4	1.93	-2.6	14.8
55	4.3	2.2	1.92	-2.7	15.5
60	4.2	2.1	1.94	-3.1	11.3
65	4.0	2.0	1.98	-2.2	11.0
70	4.1	1.9	2.16	-1.0	10.9
75	4.0	1.9	2.13	-2.3	11.1
80	4.1	1.8	2.22	-2.6	11.7
85	4.2	1.9	2.22	-1.3	10.4
90	4.2	1.8	2.38	-0.5	11.4

Appendice II

Figures

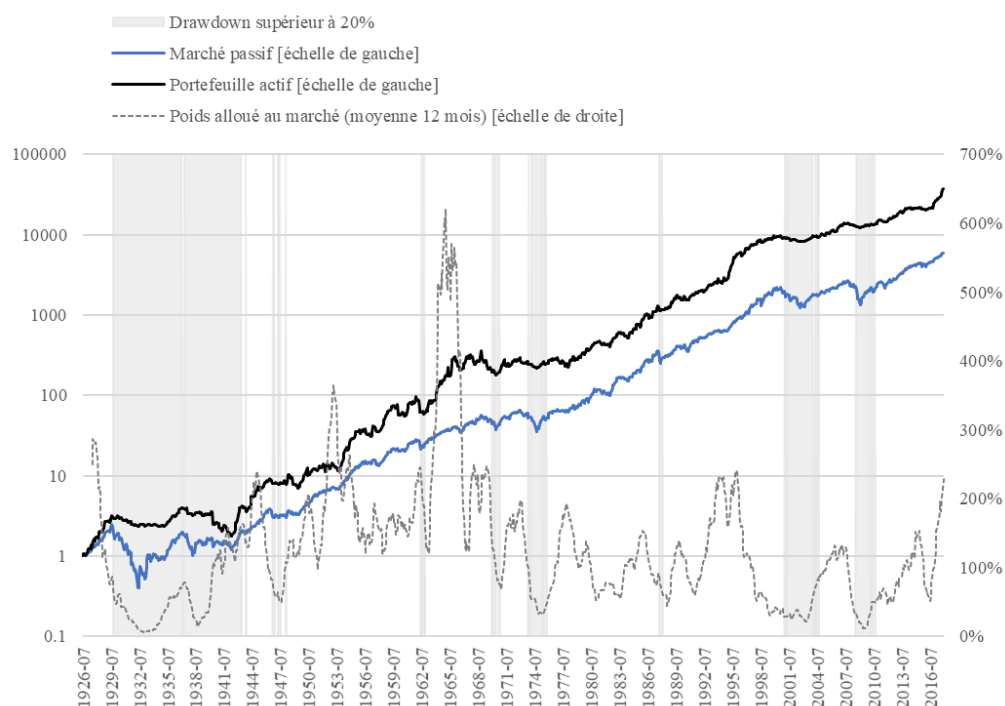
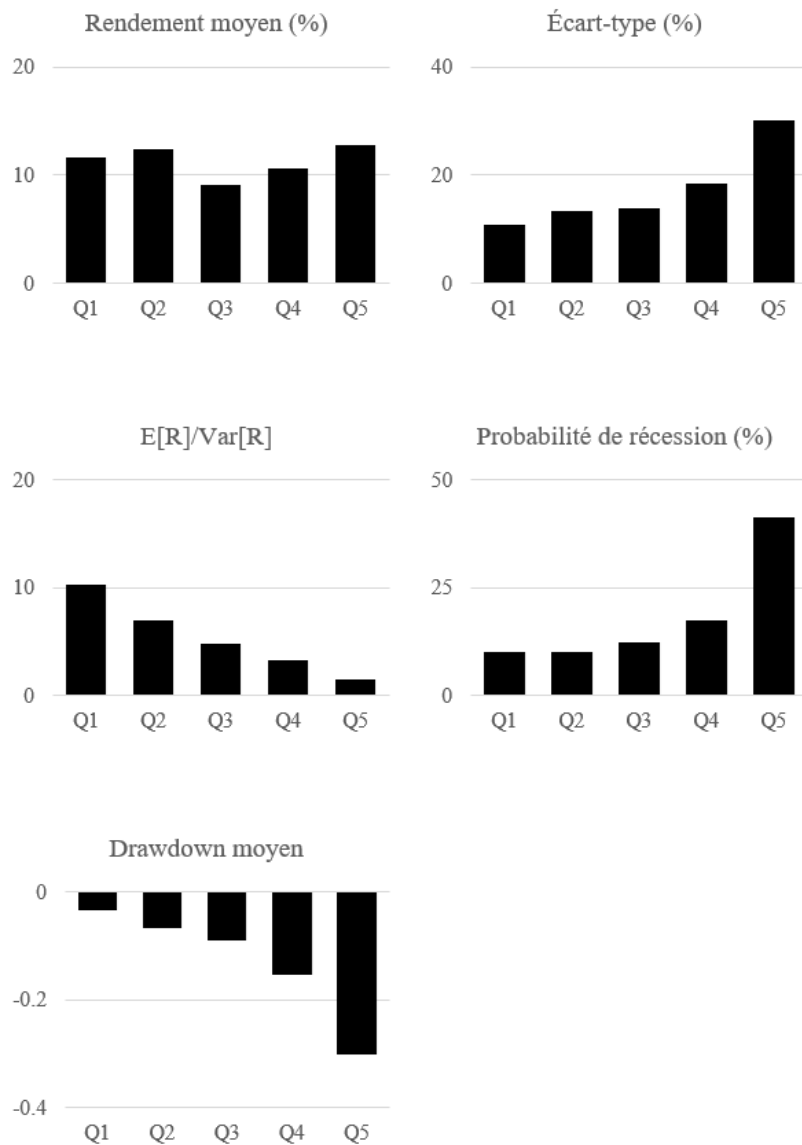


Figure 2.1 :
Performance cumulative du portefeuille de marché et du portefeuille géré activement
sur l'échantillon de 1926 à 2017

L'échelle de gauche, graduée en dollars, permet de constater la performance cumulative de la stratégie dynamique alors que l'échelle de droite, graduée en pourcentage, mesure l'exposition au facteur de marché. Les zones ombragées illustrent les périodes où le marché a connu un *drawdown* supérieur à 20 %, soit les zones de fortes baisses de valeur.

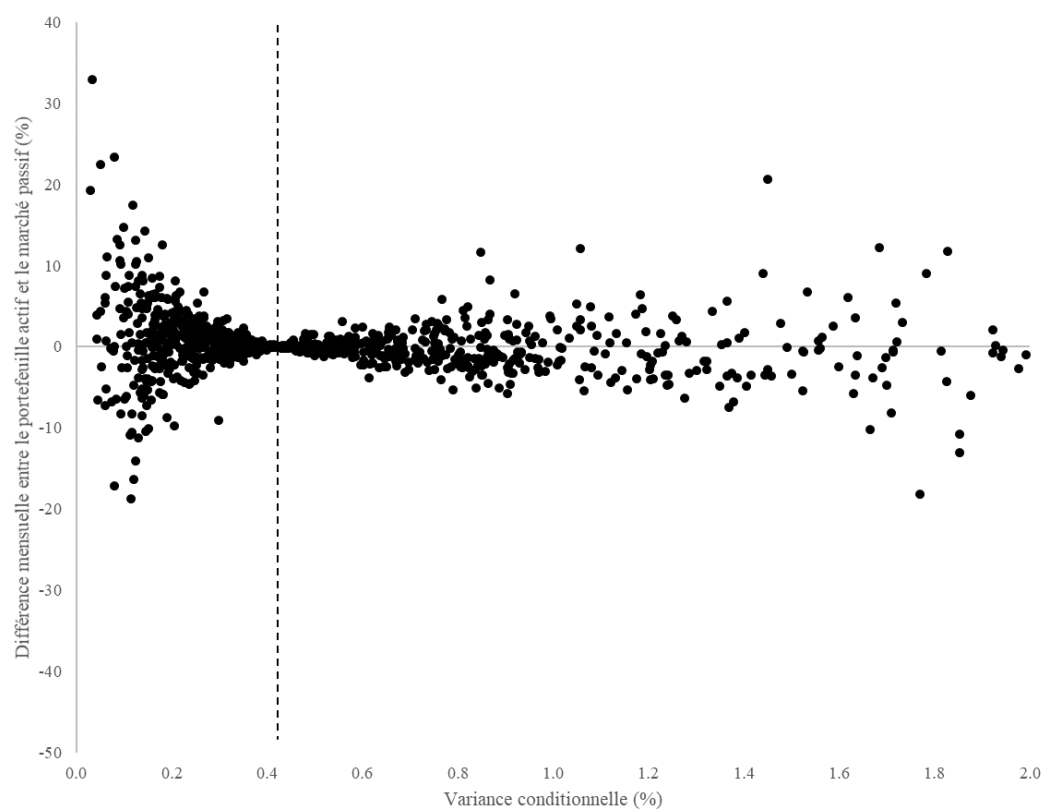


*Figure 2.2 :
Statistiques du marché conditionnelles aux quintiles de sa variance conditionnelle au mois précédent*

Dans cette figure, les statistiques présentées graphiquement sont classées en fonction des quintiles de la variance conditionnelle réalisée du marché au mois précédent. Le premier quintile des abscisses représente les 20 % plus petites variances conditionnelles du marché et le cinquième, les 20 % plus grandes variance conditionnelles.



*Figure 2.3 :
Valeur relative entre le portefeuille géré activement et le portefeuille passif de marché
de 1926   2017*



*Figure 2.4 :
Différence de rendement entre le portefeuille géré activement et le marché en fonction
de la variance réalisée du marché*

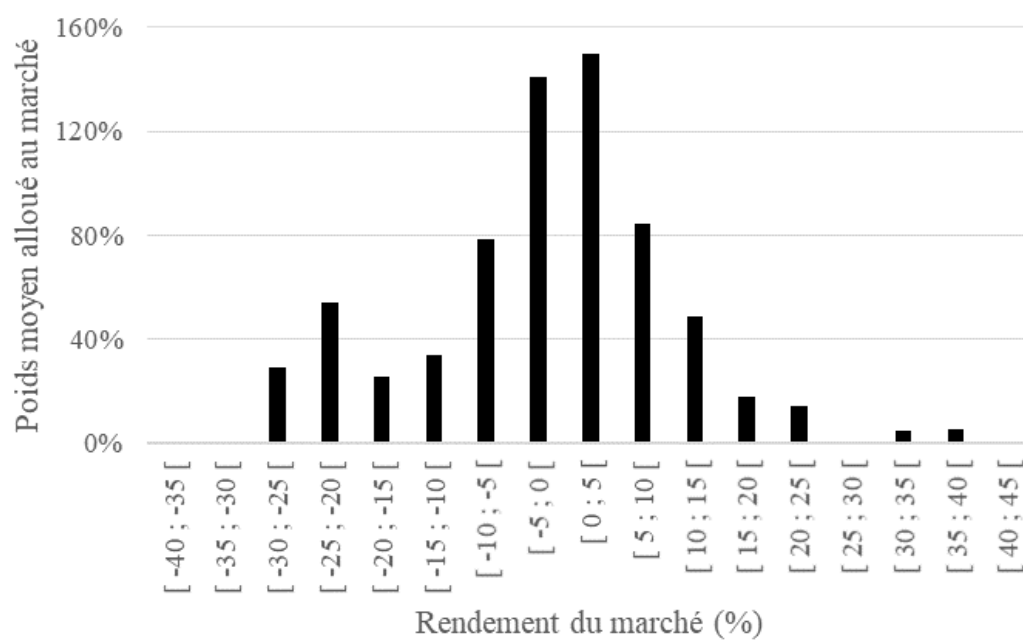
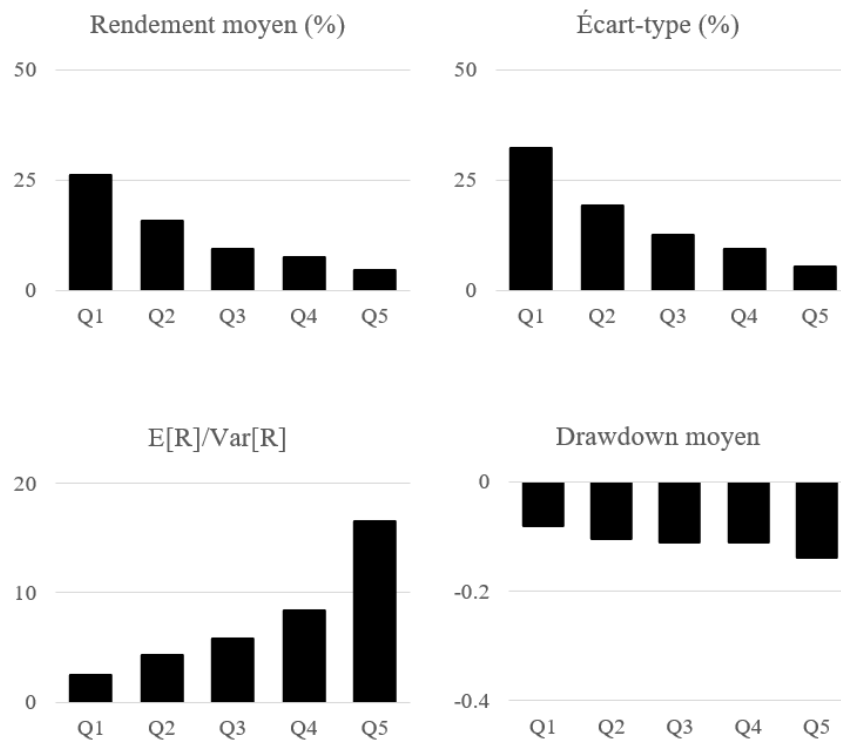


Figure 2.5 :
Poids moyen alloué au marché en fonction du rendement mensuel du marché



*Figure 2.6 :
Statistiques du portefeuille géré activement conditionnellement aux quintiles de la variance du marché*

Dans cette figure, les statistiques présentées graphiquement sont classées en fonction des quintiles de la variance conditionnelle réalisée du marché au mois précédent. Le premier quintile des abscisses représente les 20 % plus petites variances conditionnelles du marché et le cinquième, les 20 % plus grandes variance conditionnelles.

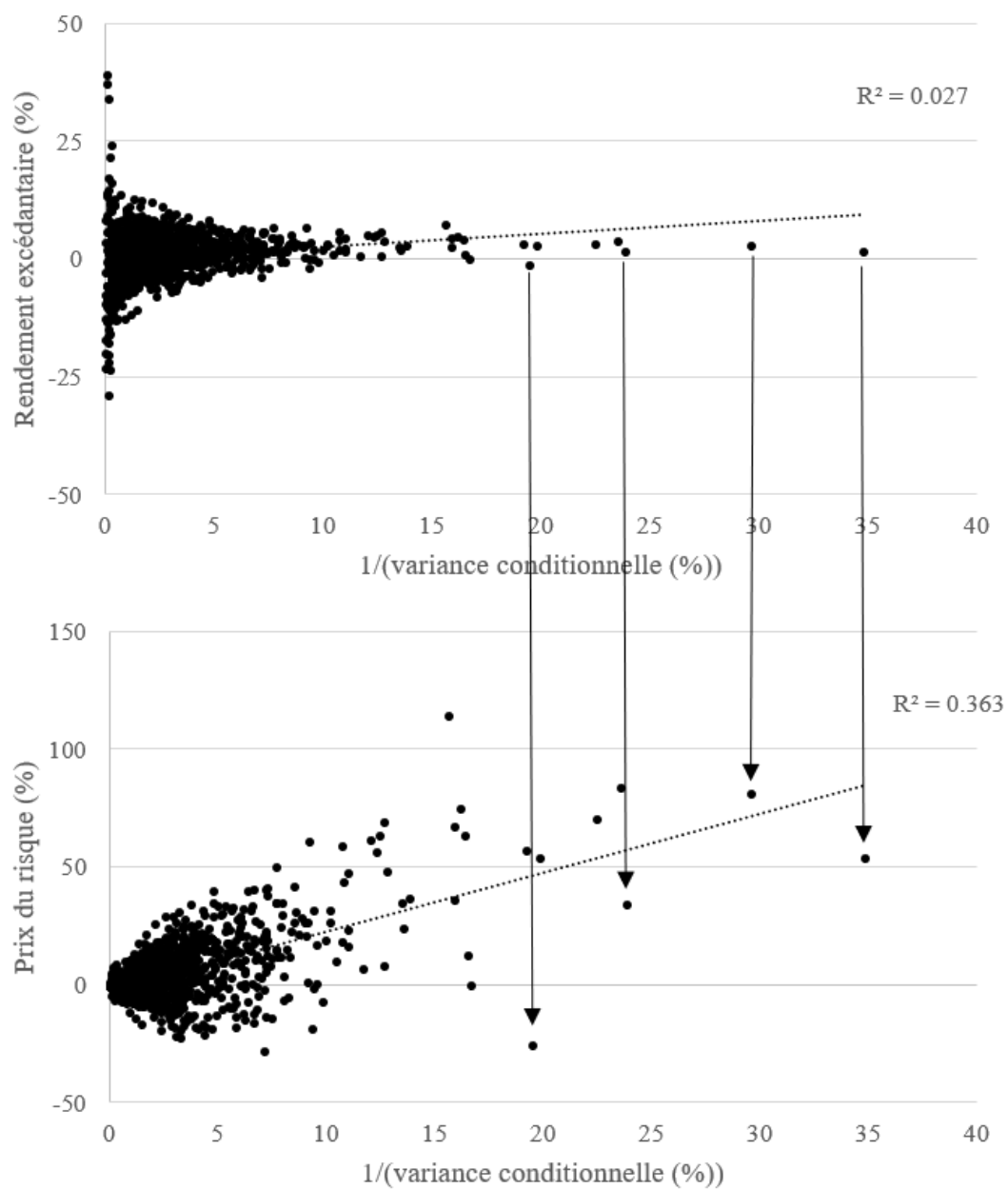


Figure 2.7 :
 Relations entre la prime de marché et l'inverse de la variance conditionnelle et entre
 le prix du risque et l'inverse de la variance conditionnelle

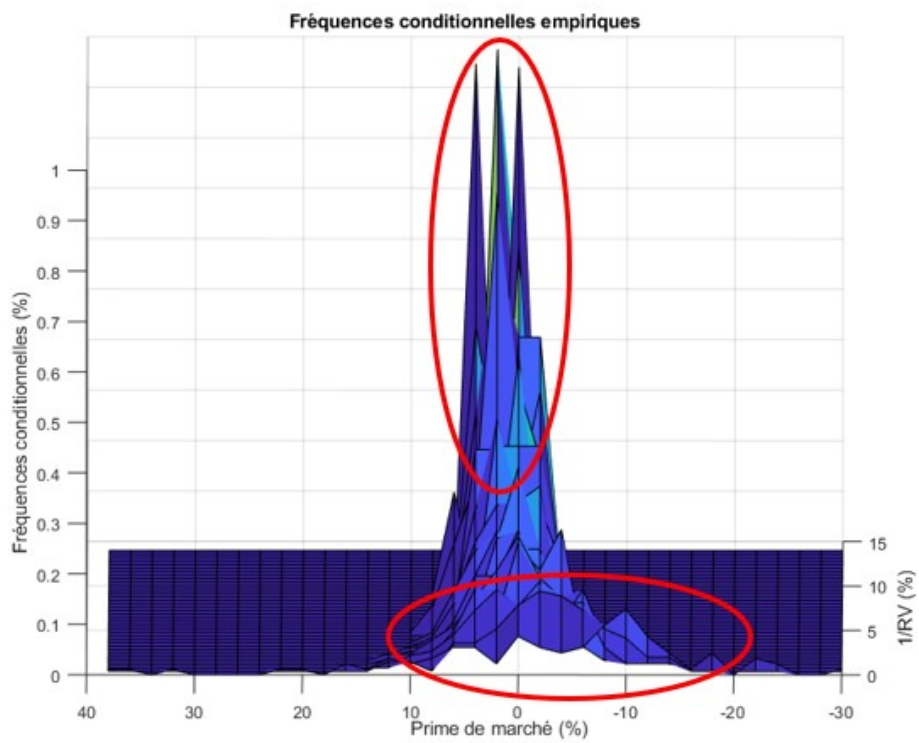
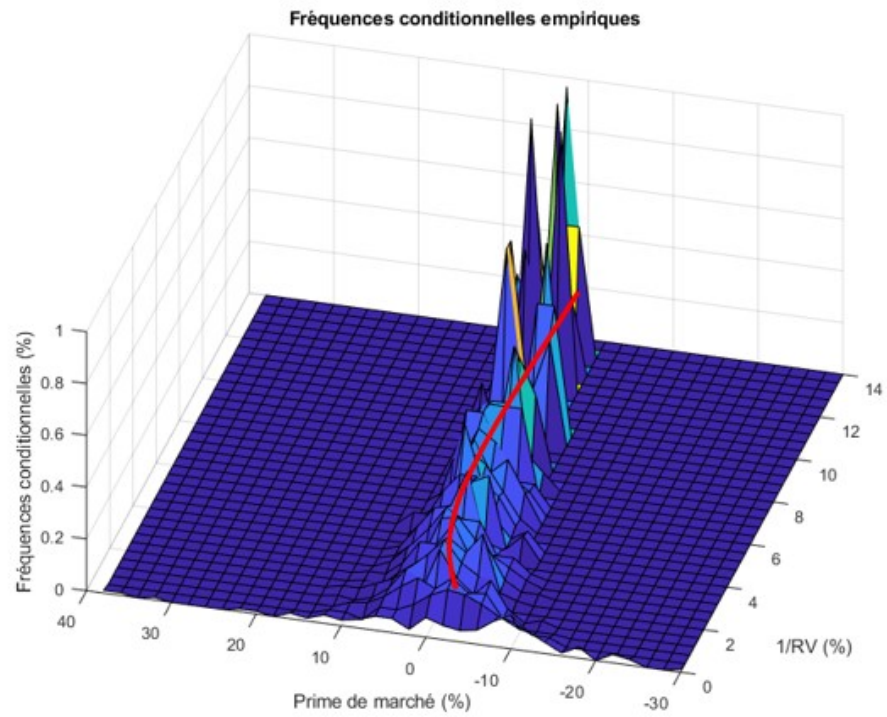
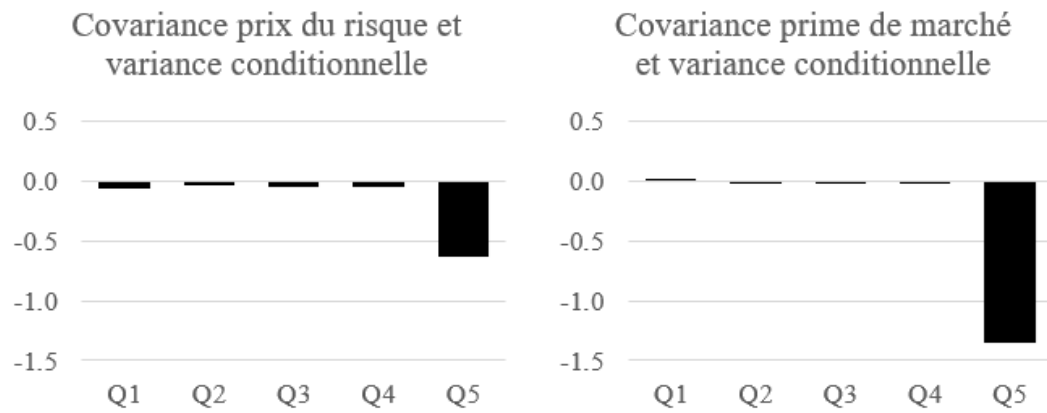
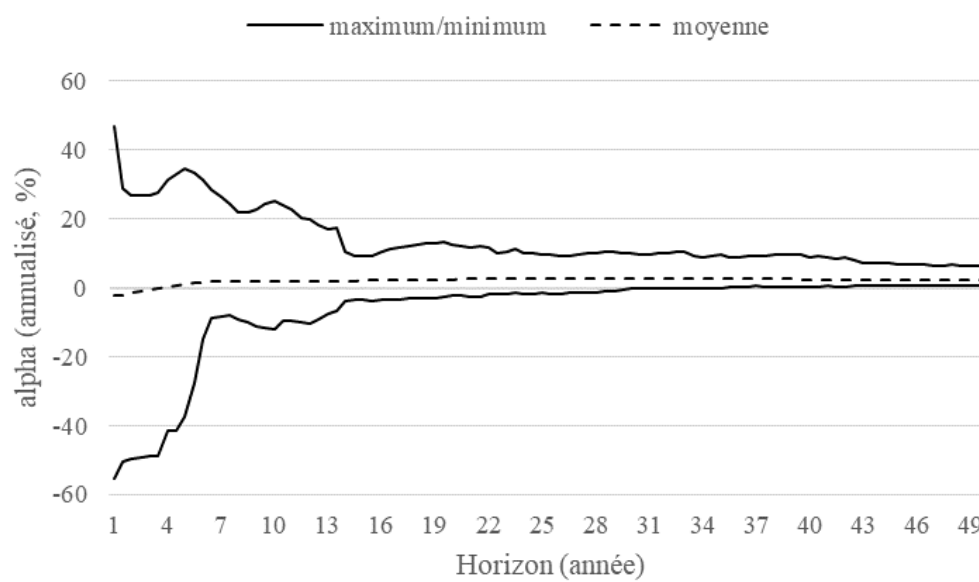


Figure 2.8 :
Distributions des rendements du marché conditionnellement à l'inverse de sa variance conditionnelle



*Figure 2.9 :
Covariances conditionnelles aux quintiles de variance du marché*

Dans cette figure, les covariances conditionnelles présentées graphiquement sont classées en fonction des quintiles de la variance conditionnelle réalisée du marché au mois précédent. Le premier quintile des abscisses représente les 20 % plus petites variances conditionnelles du marché et le cinquième, les 20 % plus grandes variance conditionnelles.



*Figure 2.10 :
Alphas générés par la stratégie dynamique sur des sous-échantillons de la période allant de 1926 à 2017 en fonction de l'horizon de placement*

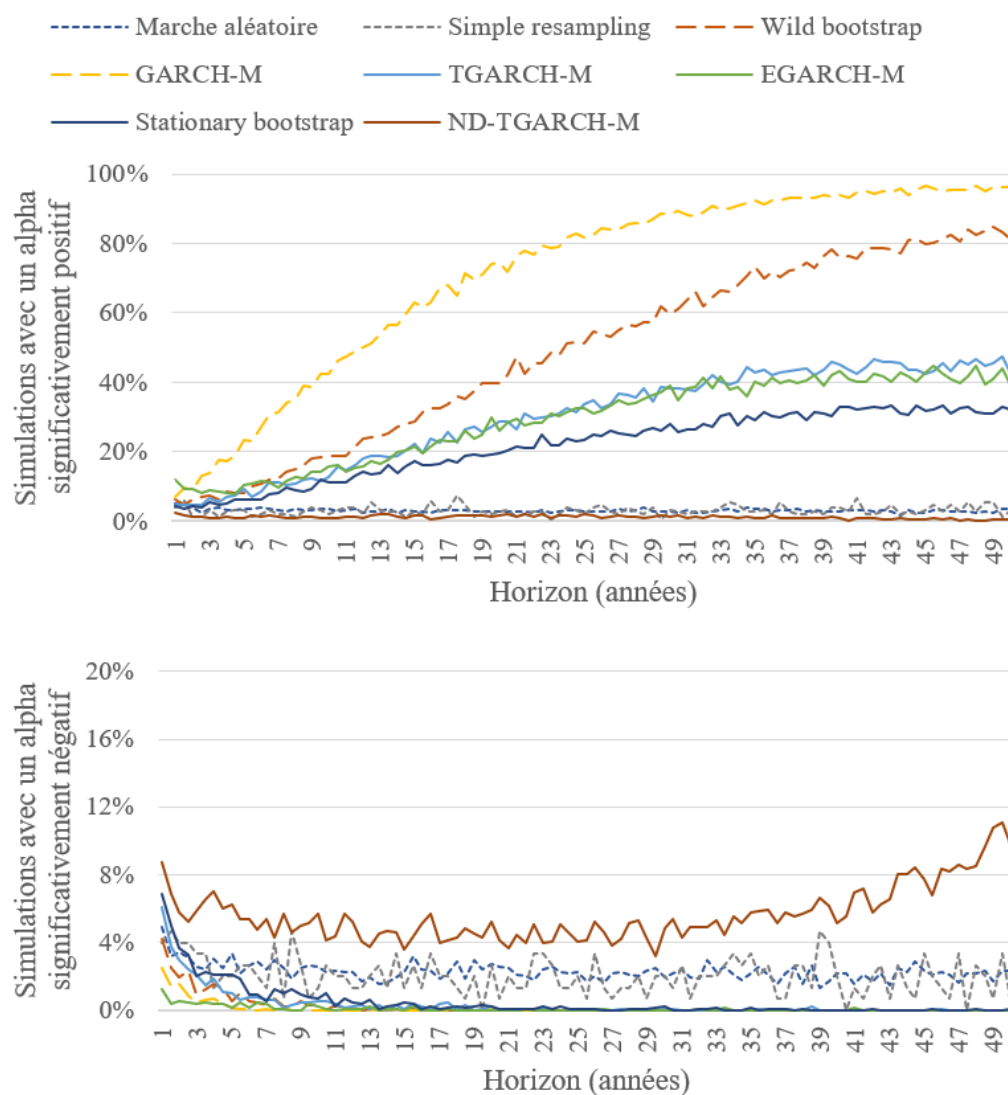


Figure 4.1 :

Pourcentage des simulations ayant un alpha significativement différent de zéro par horizon de placement – toutes les méthodes de simulation

Dans cette figure, tous les alphas ont été calculés avec des erreurs standards robustes aux autocorrélations et à l'hétéroscédasticité dans les résidus (Newey-West). Le seuil de signification utilisé est de 5 %.

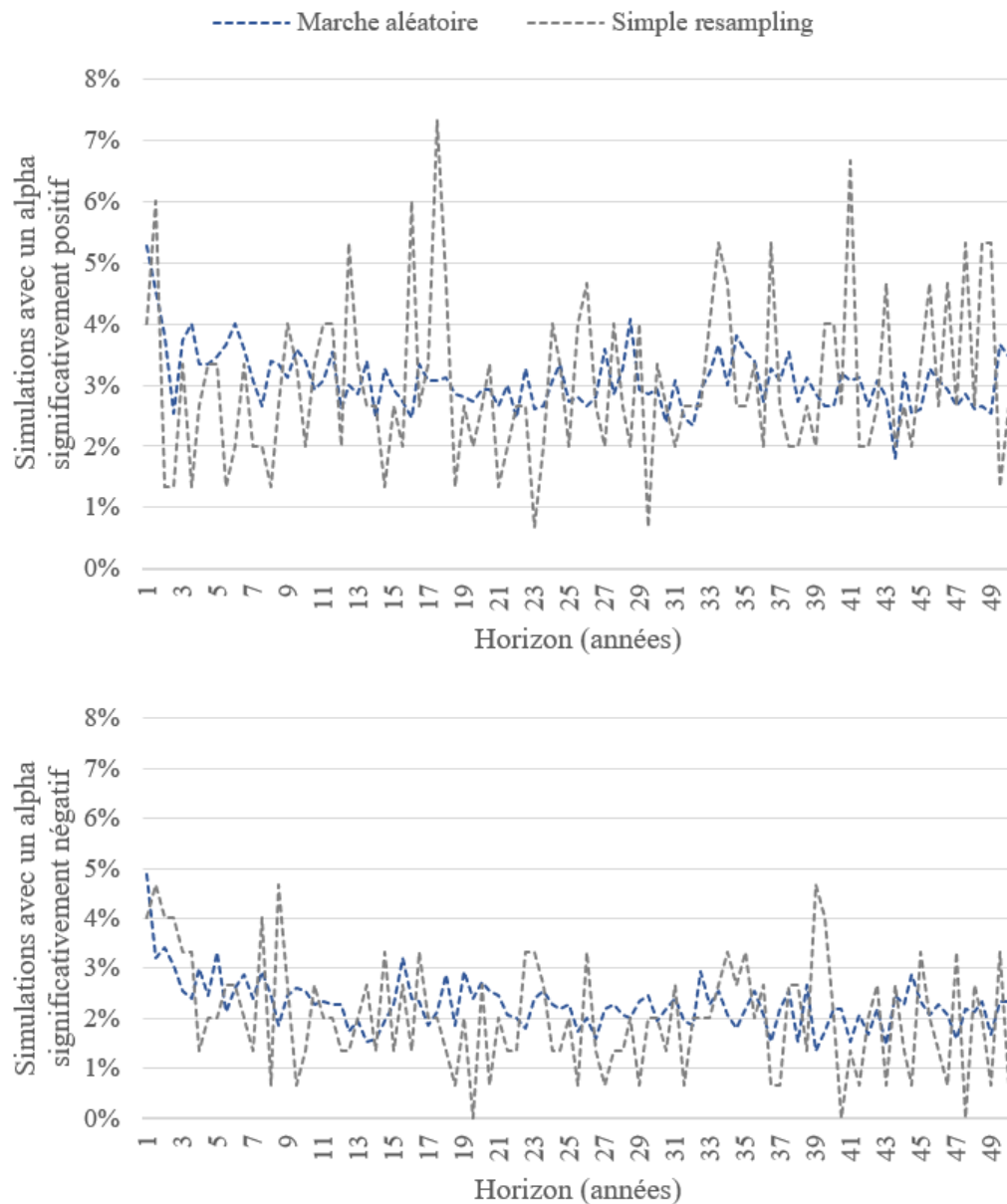


Figure 4.2 :

Pourcentage des simulations ayant un alpha significativement différent de zéro par horizon de placement – méthodes basées sur l'indépendance des rendements

Dans cette figure, tous les alphas ont été calculés avec des erreurs standards robustes aux autocorrélations et à l'hétéroscédasticité dans les résidus (Newey-West). Le seuil de signification utilisé est de 5 %.

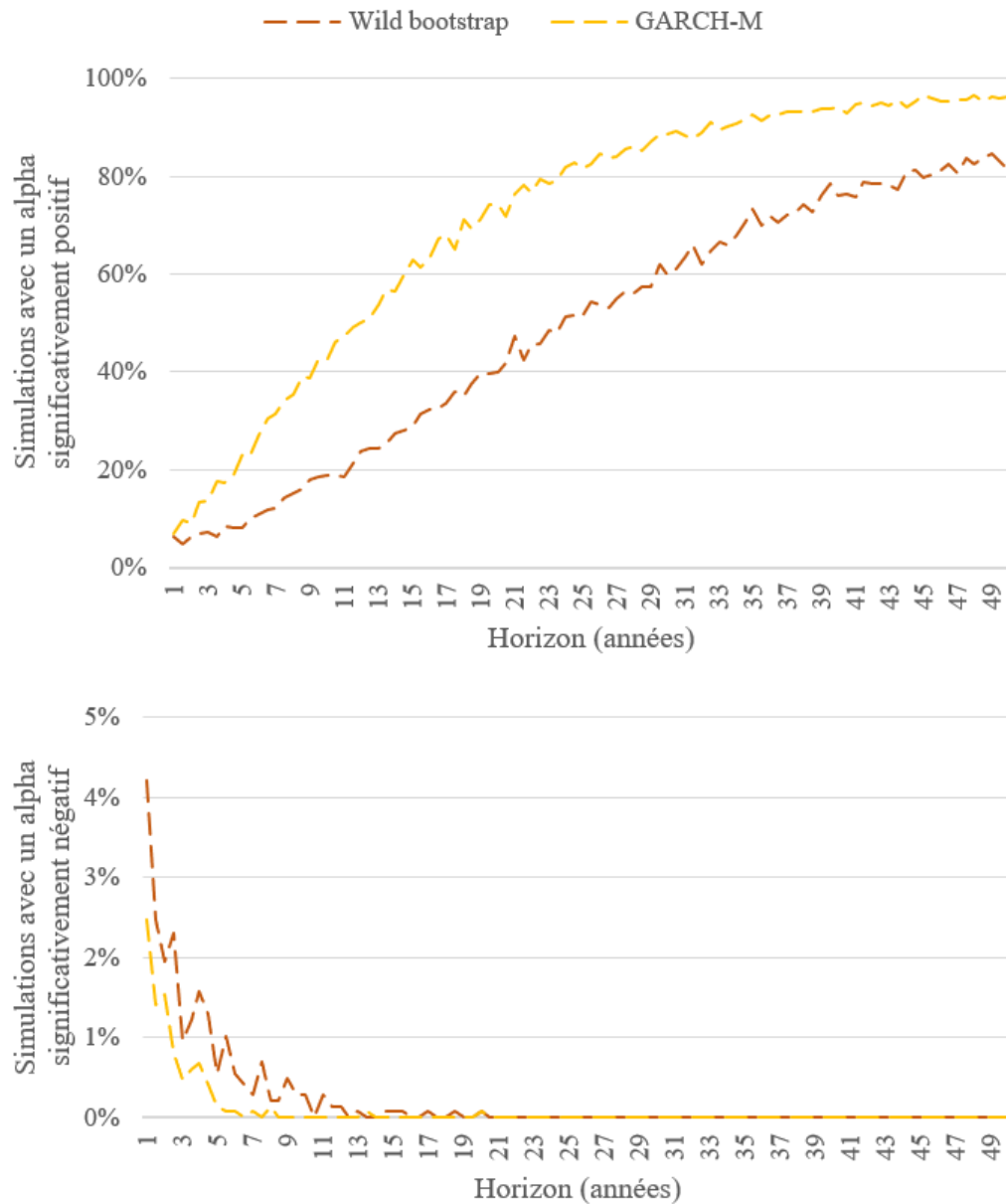


Figure 4.3 :

Pourcentage des simulations ayant un alpha significativement différent de zéro par horizon de placement – méthodes ne captant que l'hétéroscédasticité

Dans cette figure, tous les alphas ont été calculés avec des erreurs standards robustes aux autocorrélations et à l'hétéroscédasticité dans les résidus (Newey-West). Le seuil de signification utilisé est de 5 %.

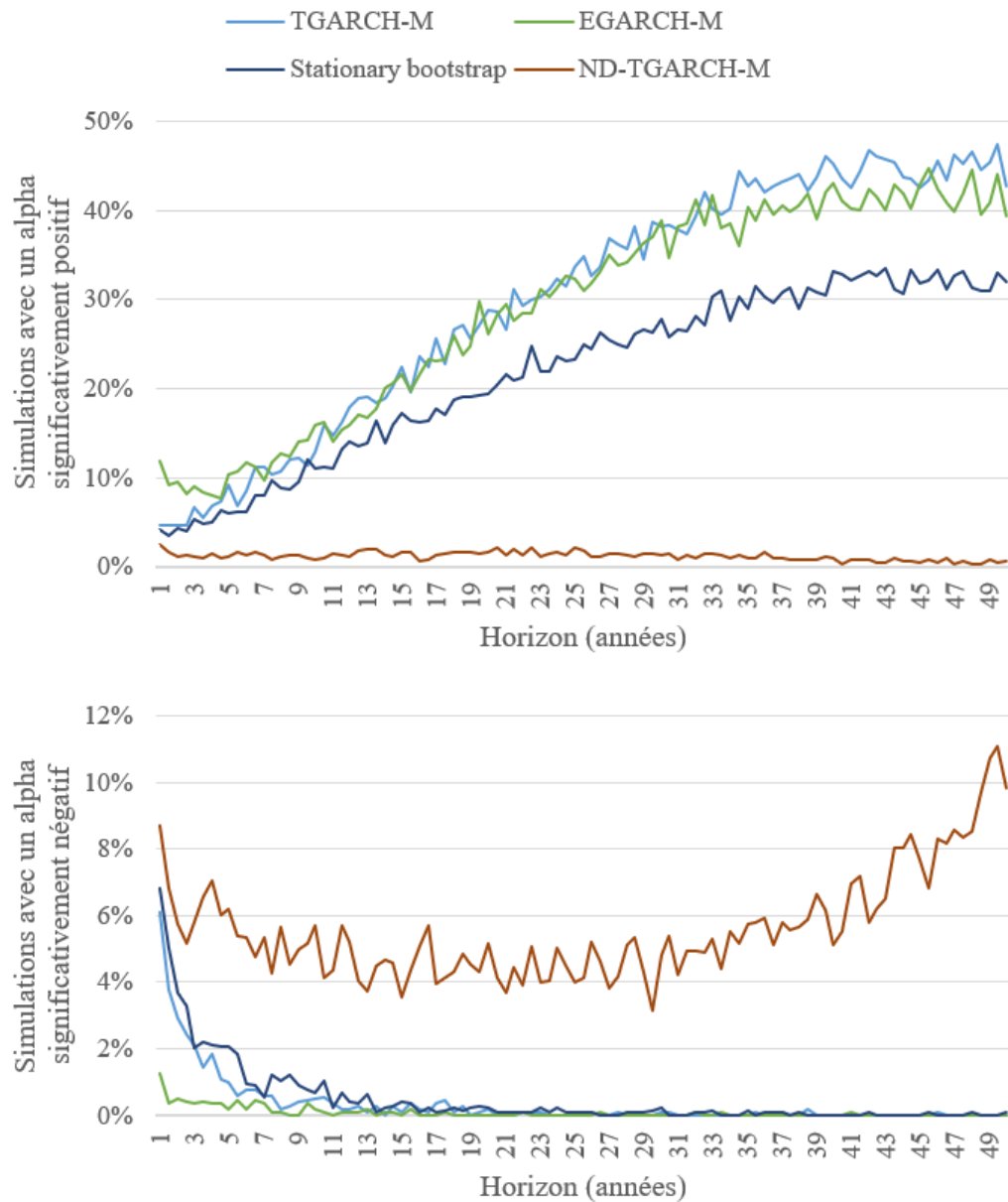


Figure 4.4 :

Pourcentage des simulations ayant un alpha significativement différent de zéro par horizon de placement – méthodes captant l'hétéroscédasticité et l'effet de levier

Dans cette figure, tous les alphas ont été calculés avec des erreurs standards robustes aux autocorrélations et à l'hétéroscédasticité dans les résidus (Newey-West). Le seuil de signification utilisé est de 5 %.

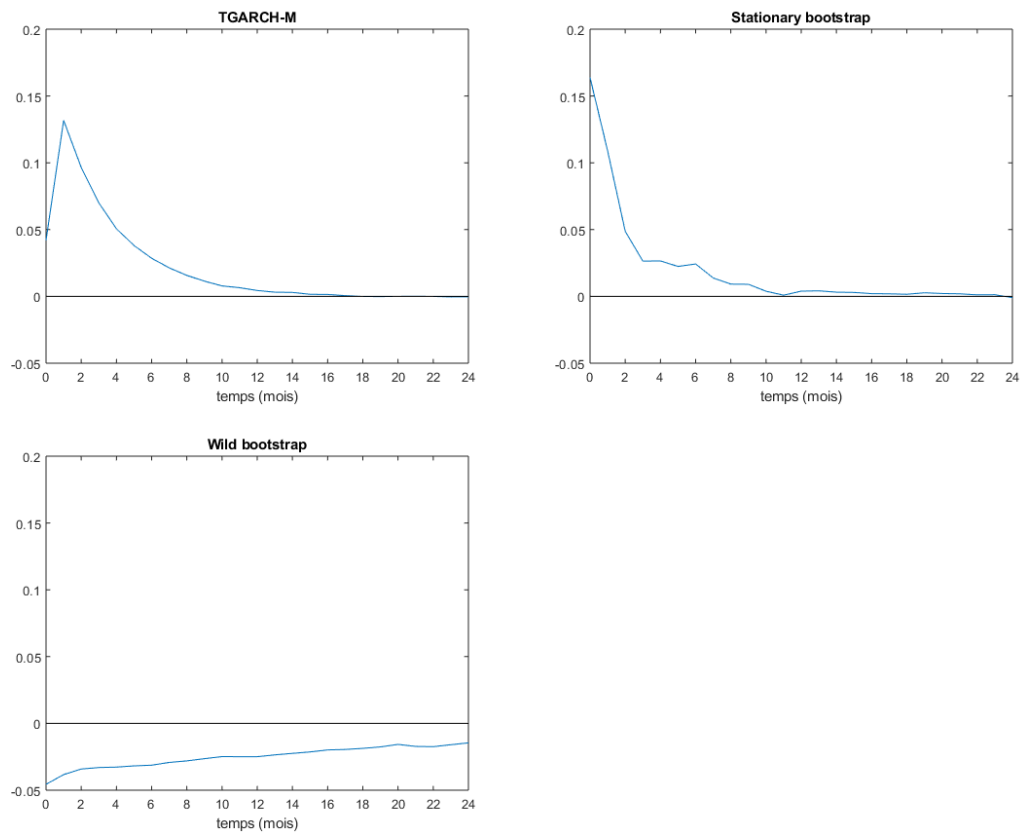


Figure 4.5 :
Impact du rendement au temps t sur les allocations aux expositions au facteur de
marché suivantes

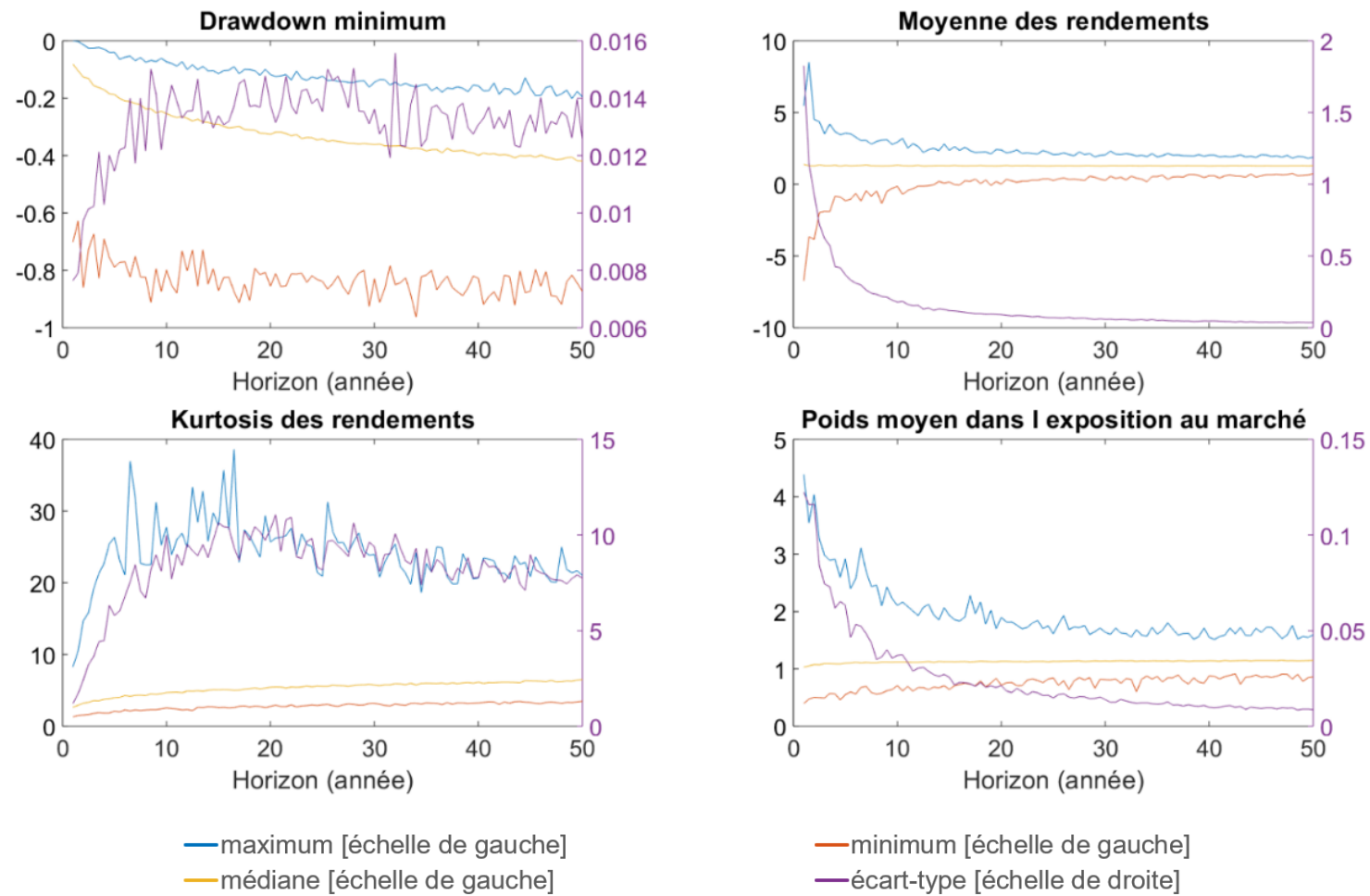


Figure 4.6 :
Comportement des variables explicatives en fonction de l'horizon de placement – TGARCH-M

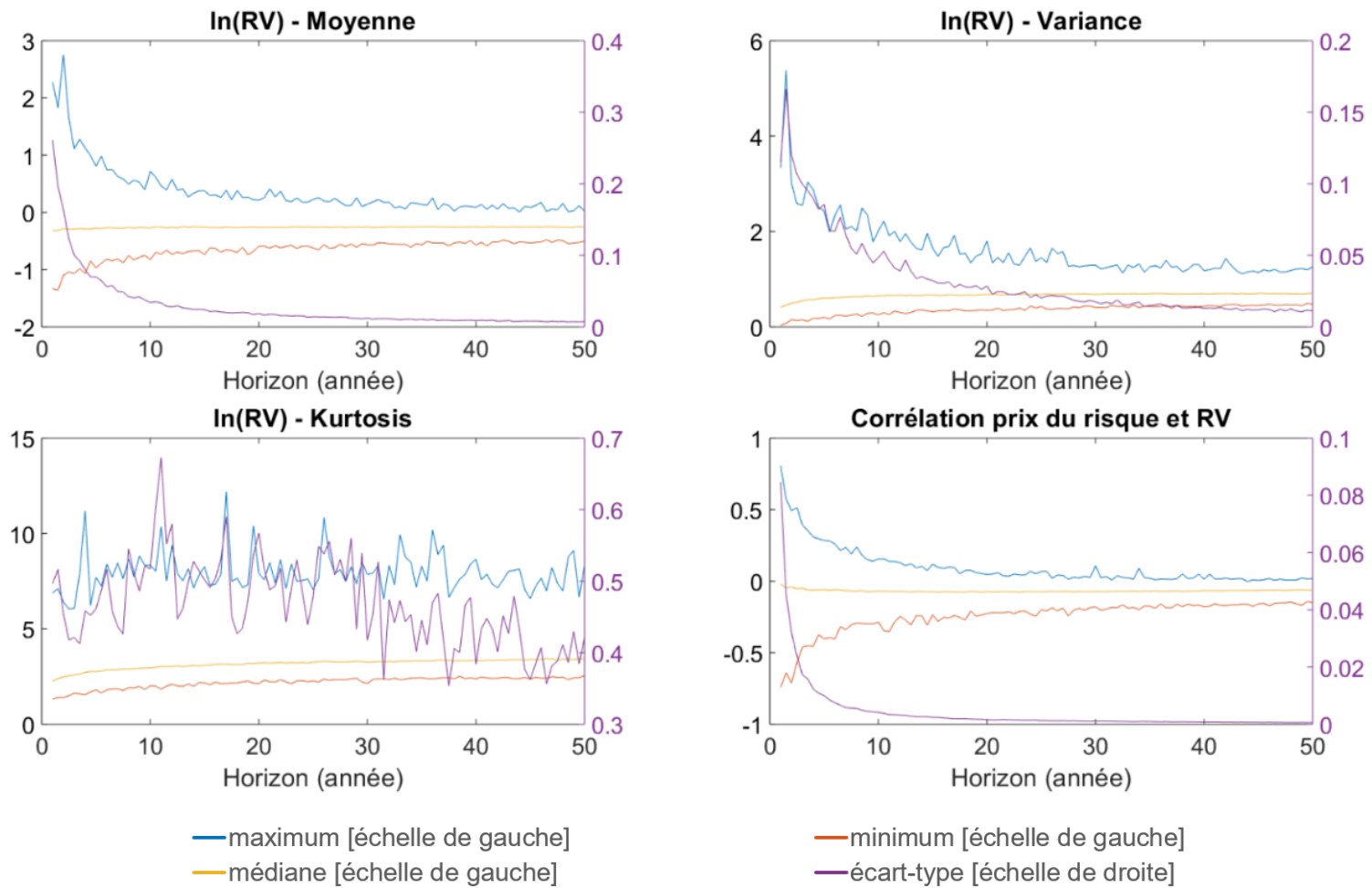
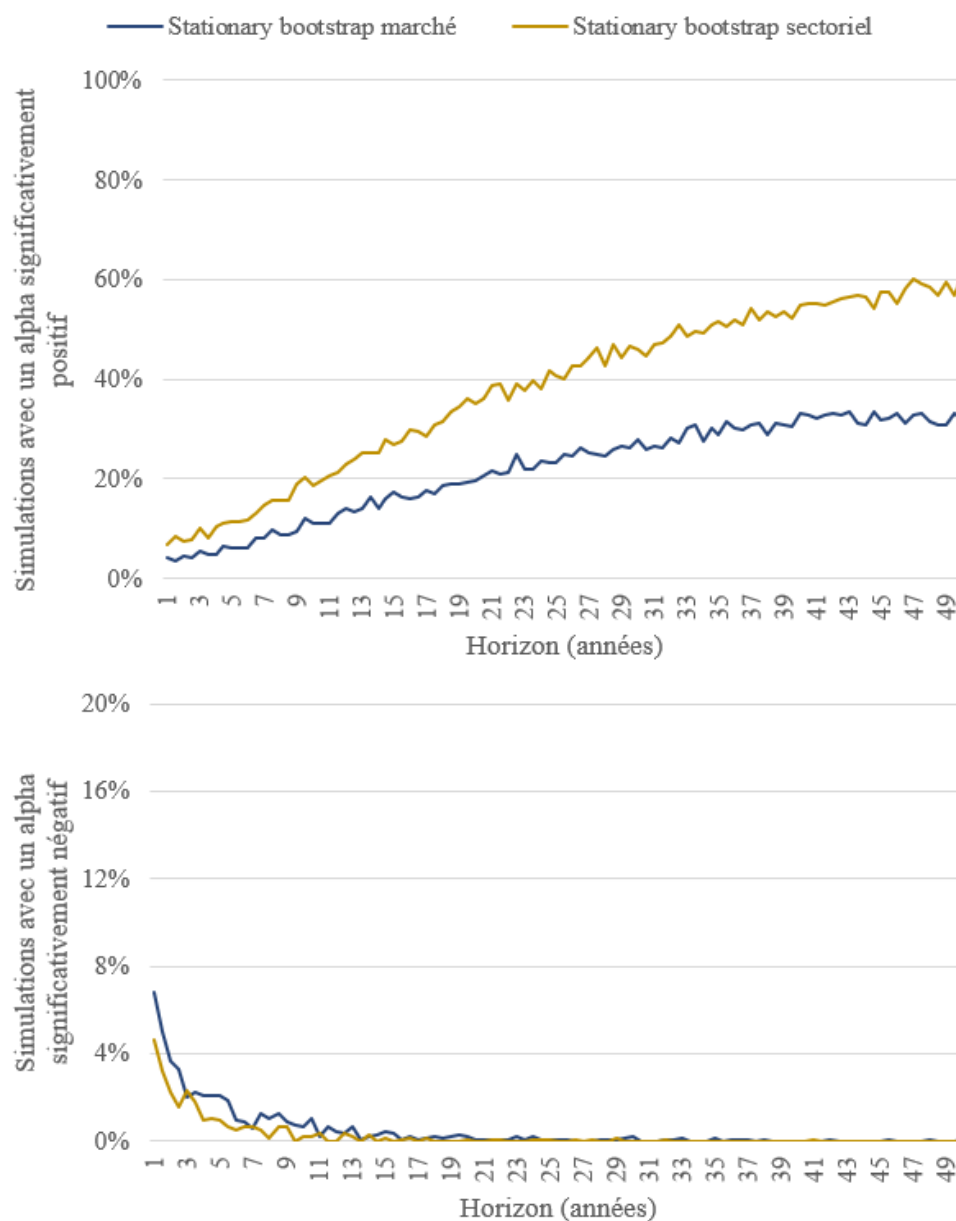


Figure 4.6 (suite) :
Comportement des variables explicatives en fonction de l'horizon de placement – TGARCH-M



*Figure 5.1 :
Pourcentage des simulations ayant un alpha significativement différent de zéro par horizon de placement*

Dans cette figure, tous les alphas ont été calculés avec des erreurs standards robustes aux autocorrélations dans les résidus (Newey-West). Le seuil de signification utilisé est de 5 %.

Appendice III

Résultats Complémentaires

Tableau A3.1 :

Valeur ajoutée espérée en fonction de l'horizon de placement – Stationary bootstrap

Horizon (année)	$\bar{\alpha}$ (%)	σ_{α} (%)	Test t	Minimum (%)	Maximum (%)
1	-1.3	12.8	-0.10	-71.0	96.5
5	1.6	6.7	0.25	-23.3	44.4
10	2.7	5.1	0.53	-11.4	26.7
15	3.3	4.4	0.76	-10.0	23.0
20	3.6	3.7	0.95	-7.4	16.2
25	3.5	3.3	1.05	-6.7	16.2
30	3.5	3.0	1.14	-5.8	17.0
35	3.6	2.9	1.23	-5.0	13.7
40	3.3	2.6	1.26	-6.4	13.5
45	3.1	2.4	1.29	-4.7	11.3
50	3.1	2.3	1.31	-4.0	12.1
55	2.8	2.2	1.30	-3.7	10.5
60	2.7	2.1	1.29	-3.4	9.5
65	2.5	2.1	1.20	-3.7	10.2
70	2.4	1.9	1.29	-2.8	8.9
75	2.4	1.9	1.30	-2.8	8.2
80	2.5	1.8	1.41	-2.8	9.2
85	2.6	1.7	1.47	-2.5	8.5
90	2.7	1.7	1.61	-1.9	9.0

Tableau A3.2 :

Pouvoir explicatif des huit variables identifiées à l'aide de la méthode du stationary bootstrap

A : Régressions univariées			
	$\hat{\beta}$	valeur p	R^2
<i>Drawdown</i> minimum	-4.47	0.00	0.08
Moyenne des rendements	0.05	0.85	0.00
Kurtosis des rendements	0.11	0.00	0.02
$\ln \sigma_t^2$ - Moyenne	3.29	0.00	0.02
$\ln \sigma_t^2$ - Variance	5.58	0.00	0.12
$\ln \sigma_t^2$ - Kurtosis	-0.40	0.02	0.00
Corrélation prix du risque et σ_t^2	-109.88	0.00	0.76
Allocation moyenne au marché	9.55	0.00	0.25
B : Régression multivariée			
	$\hat{\beta}$	valeur p	R^2
<i>Drawdown</i> minimum	-0.49	0.00	
Moyenne des rendements	-2.94	0.00	
Kurtosis des rendements	0.06	0.00	
$\ln \sigma_t^2$ - Moyenne	1.39	0.00	
$\ln \sigma_t^2$ - Variance	3.27	0.00	
$\ln \sigma_t^2$ - Kurtosis	1.26	0.00	
Corrélation prix du risque et σ_t^2	-118.94	0.00	
Allocation moyenne au marché	2.07	0.00	
			0.95

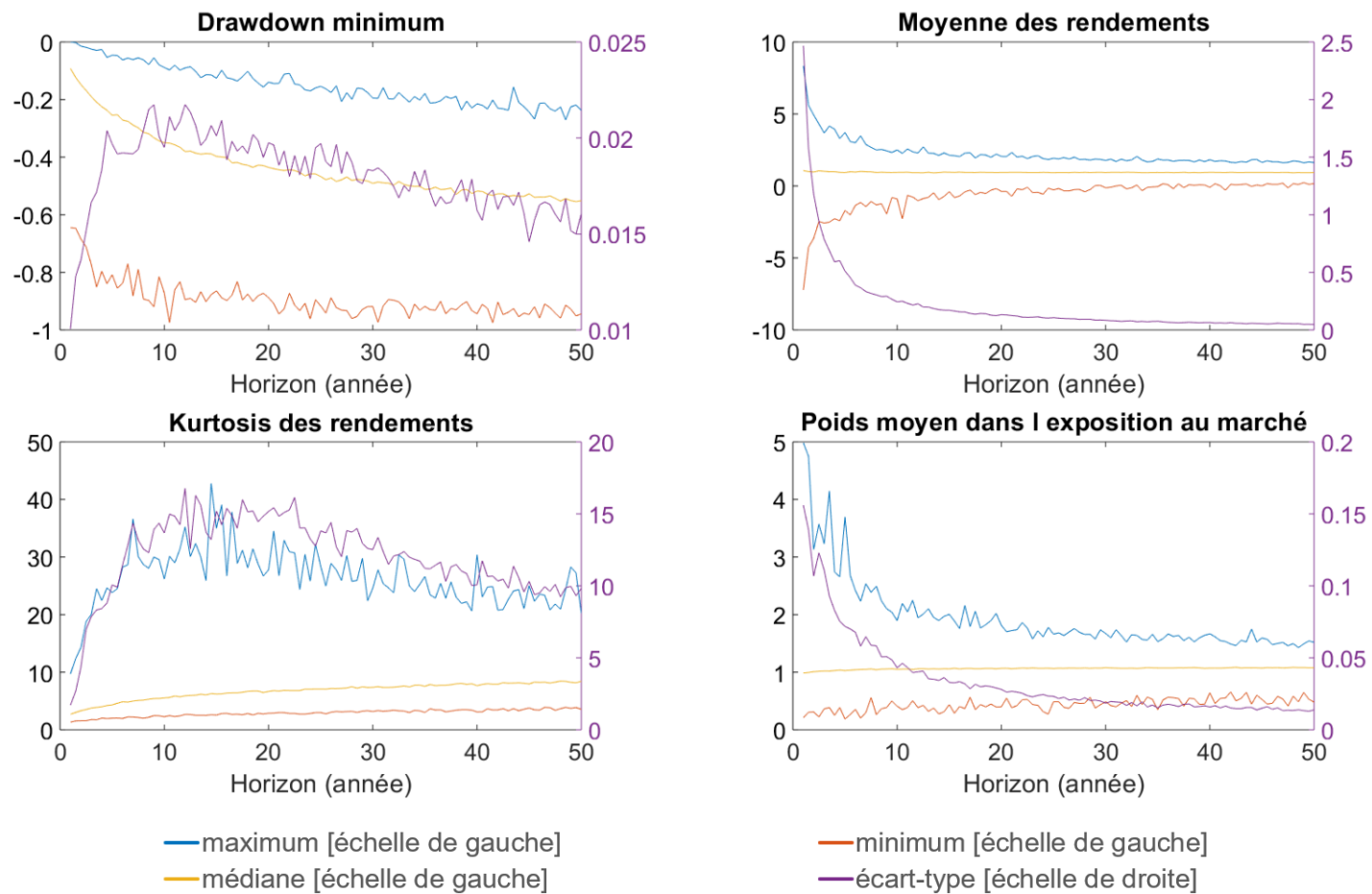


Figure A3.3 :
Comportement des variables explicatives en fonction de l'horizon de placement – Stationary bootstrap

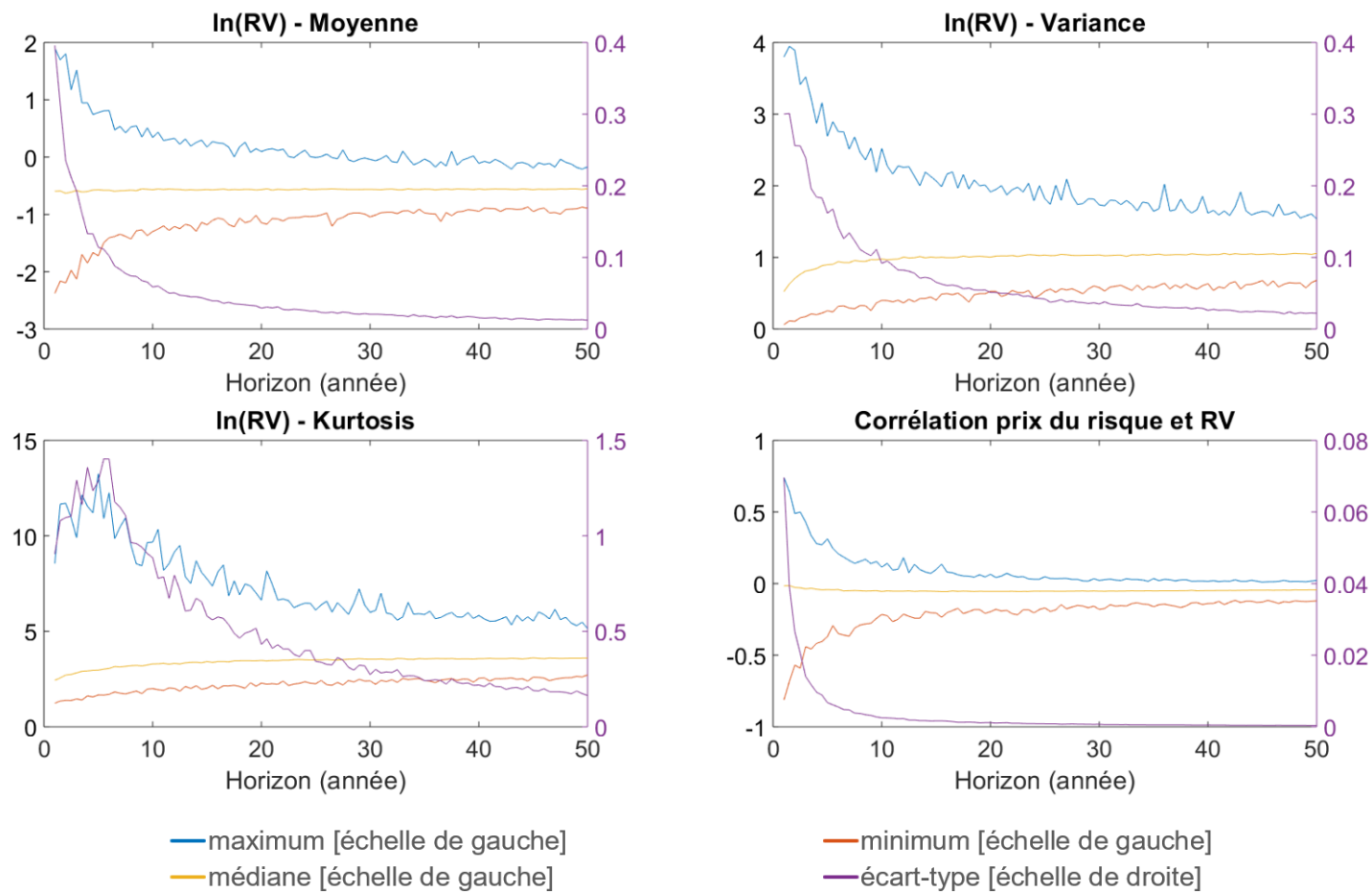


Figure A3.3 (suite) :
Comportement des variables explicatives en fonction de l'horizon de placement – Stationary bootstrap